

## 5. 地球科学への応用：粘性流体

### 5.1 レオロジーの式

#### (1) 拡散クリープ

拡散クリープでは変形速度 (歪速度)  $D'$  は応力  $S'$  に比例する。すなわち、拡散クリープ領域では、線型クリープが起こる。つまり、

$$D'_{ij} \propto S'_{ij} \quad (5.1.1)$$

である。比例定数は前出の通り粘性率であり、

$$D'_{ij} = \frac{S'_{ij}}{2\eta} \quad (5.1.2)$$

である。粘性率は拡散係数と粒径  $d$  を用いて

$$\eta = Ad^m \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] \quad (5.1.3)$$

と書くことが出来る。

#### (2) 転移クリープ：1次元の場合

(5.1.1)は

$$D = \frac{S}{2\eta} \quad (5.1.4)$$

転移クリープの場合、歪速度が応力のべき乗に比例する。

$$D \propto S^n \quad (5.1.5)$$

より、

$$D = aS^n \quad (5.1.6)$$

として、 $S^n$  の部分を分け、

$$D = aS^{n-1}S \quad (5.1.7)$$

とする。最後の  $S$  の前にある部分は実効的な粘性係数と見なすことができる。つまり、

$$\eta = \frac{S^{1-n}}{2a} \quad (5.1.8)$$

である。ここで  $a$  は拡散係数であり、温度  $T$ ・圧力  $p$  の関数として

$$a = A \exp\left[-\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] \quad (5.1.9)$$

である。ここで  $E^*$  は活性化エネルギー、 $V^*$  は活性化体積である。に代入すると

$$\eta = \frac{A^{-1}}{2} S^{1-n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] \quad (5.1.10)$$

係数を1つの pre-exponential factor にまとめると、実効粘性率は

$$\eta = BS^{1-n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] \quad (5.1.11)$$

となる。次に実効粘性率を歪速度の関数として表そう。(5.1.8)に(5.1.2)を代入すると、

$$\eta = \frac{2^{1-n} \eta^{1-n} D^{1-n}}{2a} \quad (5.1.12)$$

となり、さらに、 $\eta^{n-1}$ を両辺に掛けると

$$\eta^n = \frac{2^{-n} D^{1-n}}{a} \quad (5.1.13)$$

n乗根を取ると、 $\eta$ は

$$\eta = 2^{-1} a^{-1/n} D^{1-n/n} \quad (5.1.14)$$

となる。拡散係数(5.1.8)を代入すると、

$$\eta = \frac{A^{-1/n}}{2} D^{1-n/n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{nRT}\right] \quad (5.1.15)$$

が得られる。係数をまとめると

$$\eta = CD^{1-n/n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{nRT}\right] \quad (5.1.16)$$

となる。

### (3) 転移クリープ：2次元以上の場合

2次元以上の場合、実効粘性率を用いると構成方程式は

$$S'_{ij} = 2\eta D'_{ij} \quad (5.1.17)$$

ここで、 $S'_{ij}$ は粘性応力テンソルである。歪速度は

$$D'_{ij} = F(S') S'_{ij} \quad (5.1.18)$$

のように応力テンソルあるいは歪速度テンソルから作られる量  $S'$ の関数として表すことが出来るはずである。座標変換に対する客観性の要請から、 $S'$ としてテンソルの第2不変量を採用する。ここでは、応力テンソルの第2不変量の1つの表し方(1.4.10)を用いる。つまり、

$$S'_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} S'_{ij} S'_{ij}} \quad (5.1.19)$$

とする。ここで、 $S'_{II}$ は

$$S'_{II} = \frac{1}{2}(S_1 - S_2) \quad (5.1.20)$$

となっていて、最大差応力の半分の値と一致することに注意しよう。すると、(5.1.6)は、2次元以上において、

$$D'_{ij} = aS_{ii}^{n-1}S'_{ij} \quad (5.1.21)$$

と書き換えられる。よって、実効粘性率は、

$$\eta = BS_{ii}^{1-n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] \quad (5.1.22)$$

となる。同様に歪速度テンソルの第2不変量

$$D'_{ii} = \sqrt{\frac{1}{2}D'_{ij}D'_{ij}} \quad (5.1.23)$$

を用いると、

$$\eta = CD_{ii}^{1-n/n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{nRT}\right] \quad (5.1.24)$$

となる。

## 5.2 マントル対流の式

### (1) 状態方程式

密度は関数

$$\rho = \rho(T, p) \quad (5.2.1)$$

で表されるが、密度は主に深さ方向への圧力変化によって変化し、温度変化や水平の圧力変化による密度の変動は小さい。そこで、密度を深さ平均の値と、そこからの変動と考え、変動の部分をテイラー展開の1次までと近似、すなわち線型化する。

$$\begin{aligned} \rho(T, p) &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) + \rho'(T - \bar{T}, p - \bar{p}) \\ &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - \bar{T}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - \bar{p}) \\ &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) - \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p})\alpha(T - \bar{T}) + \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p})\frac{1}{K_T}(p - \bar{p}) \\ &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p})\left[1 - \alpha(T - \bar{T}) + \frac{1}{K_T}(p - \bar{p})\right] \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

ここで、 $\alpha$ は熱膨張率、 $K_T$ は等温体積弾性率、 $\bar{T}$ はその深さでの平均温度である。静水圧 $\bar{p}$ は静水圧の式

$$0 = -\frac{d\bar{p}}{dz} + \bar{\rho}g \quad (5.2.3)$$

から求められる。平均密度は断熱体積弾性率の定義

$$\frac{1}{K_s} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \quad (5.2.4)$$

と(5.2.2)を合わせると、

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right)_s \frac{dz}{d\bar{p}} = \frac{1}{\bar{\rho}g} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right)_s = \frac{\bar{\rho}}{K_s} \quad (5.2.5)$$

となり,

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_s = \frac{\bar{\rho}g}{K_s} = \frac{g}{\phi} \quad (5.2.6)$$

が得られる。この式は**アダムス・ウィリアムソン方程式**と呼ばれる。ここで、 $\phi$ はサイスミックパラメータ、 $V_B$ はバルク音速、

$$\phi = V_B^2 = V_p^2 - V_s^2 = \frac{K_s}{\bar{\rho}} \quad (5.2.7)$$

である。右辺が一定値であるなら、平均密度は

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp\left[\frac{g}{\phi} z\right] \quad (5.2.8)$$

となる。

## (2) 非弾性近似

マントル対流はゆっくりとした流れなので、音波は流れに影響しない。そこで、音波の発生による密度や速度の高速な変動を取り除いて、ゆっくりとした変動のみを扱うように式を変形する。この近似を**非弾性近似** (unelastic approximation)と呼ぶ。

連続の式から密度の影響を取り除くと、

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (5.2.9)$$

となる。エネルギー方程式では断熱変化項を近似する。この項に含まれる圧力の時間変動を取り除き、さらに(1)と同様、水平方向の圧力変動は小さいとして無視する。すなわち、

$$\frac{dp}{dt} = \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) = \alpha T \mathbf{v} \cdot \nabla p = \alpha T v_3 \frac{dp}{dz} = \alpha T v_3 \bar{\rho} g \quad (5.2.10)$$

とする。よって、エネルギー方程式は

$$\bar{\rho} C_p \frac{dT}{dt} + \alpha T v_3 \bar{\rho} g = \nabla \cdot (k \nabla T) + \bar{\rho} h^{int} + \Phi \quad (5.2.11)$$

となる。この式はもともと、熱力学の第2法則を時間微分した式

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad (5.2.12)$$

だったので、 $dq=0$ として、

$$\bar{\rho} C_p \frac{dT}{dt} + \alpha T v_3 \bar{\rho} g = \bar{\rho} C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) + \alpha T v_3 \bar{\rho} g = 0 \quad (5.2.13)$$

ここで、定常状態とすると時間微分項がなくなり、

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T + \frac{\alpha T v_3 g}{C_p} = 0 \quad (5.2.14)$$

となる。さらに垂直方向の速度が大きい場所では水平方向の速度が小さいとすると、

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s = \frac{\alpha g T}{C_p} \quad (5.2.15)$$

が得られる。この式は**断熱温度勾配**を表す式である。

### (3) 運動方程式

ここでは、運動方程式を考える。マントルは粘性が非常に大きいため、常に粘性応力と浮力が釣り合いを保ちつつ流れが起きる。すなわち流体の慣性は無視することが出来る。従って、運動方程式の左辺は0に置くことが出来る。つまり、運動方程式は

$$0 = -\nabla p + \left[ \eta \left\{ (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla + \rho \mathbf{g} \quad (5.2.16)$$

と書くことが出来る。

式 (5.2.1), (5.2.6), (5.2.9), (5.2.11), (5.2.12) を組み合わせると非弾性近似によるマントル対流の方程式が得られる。これは、マントル対流理論において最も近似度合いの低い方程式であると考えて良い。

### (4) 拡張ブジネスク近似・ブジネスク近似

圧縮による密度変化が小さいなら、連続の式の密度のみを一定と置いた式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2.17)$$

を使うことが出来る。つまり、非圧縮性流体を考えるのである。このときは、運動方程式はさらに簡略化されて、

$$0 = -\nabla p + \left[ \eta \{ (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \} \right] \cdot \nabla + \rho \mathbf{g} \quad (5.2.18)$$

表される。エネルギー方程式の散逸項は、

$$\Phi = 2\eta D'_{ij} D'_{ij} = \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (5.2.19)$$

となる。密度の圧縮性のみを無視する近似を**拡張ブジネスク近似**(Extended Buossinesq approximation)と呼ぶ。

さらに、圧縮による温度勾配が小さいと仮定できるなら、エネルギー方程式の断熱温度項と粘性散逸項を落とすことができる。この近似を**ブジネスク近似** (Buossinesq approximation)と呼ぶ。この場合には、エネルギー方程式は対流項、拡散項、内部発熱項のみを持つ。つまり、

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho h^{int} \quad (5.2.20)$$

断熱温度項だけでなく、散逸項がなくなる理由は無次元化のところで考える。

### 5.3 基礎方程式の無次元化

#### (1) 無次元化のスケール

近似がどの程度よく成り立っているか見極めるためには、基礎方程式を無次元化して各項の大きさを見積る必要がある。無次元化は、変数の長さ、時間に対して次のような基準となるスケールを用いて行う。ここで、左辺が次元付き変数(あるいはパラメータ)、右辺がスケーリングの係数と無次元の変数(あるいはパラメータ)である。

$$x = hx' \quad (5.3.1)$$

$$z = hz' \quad (5.3.2)$$

$$t = \frac{h^2}{\kappa} t' = \frac{h^2 \rho_0 C_p}{k} t' \quad (5.3.3)$$

温度については

$$T - T_0 = \Delta T T' \quad (5.3.4)$$

である。ここで地表温度  $T_0$  は

$$T_0 = \Delta T T'_0$$

である。物性に関するパラメータ、密度、温度、粘性率、については、

$$\rho = \rho_0 \rho' \quad (5.3.5)$$

$$\eta = \eta_r \eta' \quad (5.3.6)$$

$$\alpha = \alpha_r \alpha' \quad (5.3.7)$$

$$C_p = C'_p C'_p$$

さらに、速度、圧力(応力)は

$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{h} \mathbf{v}' \quad (5.3.8)$$

$$p = \frac{\eta_r \kappa}{h^2} p' \quad (5.3.9)$$

のように表すことが出来る。これらを必要な方程式に代入して整理すると、無次元化した方程式が得られる。

#### (2) 状態方程式と非圧縮性

状態方程式にを代入すると、

$$\rho(T, p) = \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) \left[ 1 - \alpha_r \alpha' (T' - \bar{T}') \Delta T + \frac{1}{K_T K'_T} (p' - \bar{p}') \frac{\eta_r k}{\rho_r C_p h^2} \right] \quad (5.3.10)$$

となる。この式を少し変形すると、

$$\rho = \bar{\rho} \left[ 1 - \alpha_r \Delta T \alpha' (T' - \bar{T}') + \frac{1}{K_T} \frac{\eta_r k}{\rho_r C_p h^2} \frac{1}{K'_T} (p' - \bar{p}') \right] \quad (5.3.11)$$

となる。ここで、大括弧[ ]内の次の部分は、

$$\alpha_r \Delta T = \varepsilon \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_T} \frac{\eta_r k}{\rho_r C_p h^2} &= \frac{\rho_r k^2}{K_T \rho_r^2 C_p^2 h^2} \cdot \frac{\eta_r C_p}{k} \\ &= \frac{K_S}{K_T} \frac{\rho_r}{K_S} \frac{\kappa^2}{h^2} \cdot \frac{\eta_r C_p}{k} = \frac{K_S}{K_T} \left( \frac{v_r}{V_B} \right)^2 \cdot \frac{\eta_r C_p}{k} = \frac{K_S}{K_T} M^2 Pr \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

のように表される。ここで、

$$M = \frac{v_r}{V_B} = \frac{\kappa}{h} \sqrt{\frac{K_S}{\rho_r}} \quad (5.3.14)$$

は速度スケールと音速に対する比、すなわち、速度スケールの**マッハ数** (Mach number)である。また、

$$Pr = \frac{v}{\kappa} = \frac{\eta_r / \rho_r}{k / \rho_r C_p} = \frac{\eta_r C_p}{k} \quad (5.3.15)$$

は**プラントル数** (Prandtl number)である。プラントル数は熱拡散と運動量拡散の速さの比を表している。

これらの無次元数について、マンツルの典型的な物性値に対して見積もると、 $M^2 \sim 10^{-33}$ 、 $Pr \sim 10^{23}$ 、 $\varepsilon \sim 10^{-2}$ である。このことから、第2項および第3項は平均密度と比較して小さく、無視して良いことが分かる。このことは、音速よりも遅い流体では**非圧縮性**を近似として用いて良い\*ことを意味する。ただし、これらの項は運動方程式の浮力項では無視することが出来ない。というのは、浮力項の平均密度の項は圧力項から出てくる静水圧とキャンセルアウトして浮力項から消えてしまうからである。結局、

$$\rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \alpha_r \Delta T \alpha' (T' - \bar{T}') + \bar{\rho} \frac{K_S}{K_T} M^2 Pr \frac{1}{K'_T} (p' - \bar{p}') \quad (5.3.16)$$

が得られる。

$$\Delta \rho = -\bar{\rho} \alpha_r \Delta T \alpha' T' + \bar{\rho} \frac{K_S}{K_T} M^2 Pr \frac{1}{K'_T} p' \quad (5.3.17)$$

である。

注：マンツルのように上下の圧力差が大きく、密度が圧力で大きく変化する場合は、深さ方向のみの圧縮の影響を考える。

## (3) 連続の式

次に連続の式を考える。(5.3.11)から(5.3.16)を得る過程で、浮力項以外では密度変動の項は無視して良いことが分かったので、これらの項を無視すると、連続の式は

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (5.3.18)$$

となる。(5.2.6) を無次元化すると、

$$\frac{1}{\bar{\rho}'} \frac{1}{h} \frac{d\bar{\rho}'}{dz'} = \frac{\bar{\rho}g}{K_S} = \frac{\alpha_r g}{C_p} \frac{\bar{\rho}C_p}{\alpha K_S} \quad (5.3.19)$$

より、

$$\frac{1}{\bar{\rho}'} \frac{d\bar{\rho}'}{dz'} = \frac{\alpha_r g h}{C_p} \frac{\bar{\rho}C_p}{\alpha K_S} = \frac{Di}{\Gamma} \quad (5.3.20)$$

となり、

$$\frac{1}{\bar{\rho}'} \frac{d\bar{\rho}'}{dz'} = \frac{Di}{\Gamma} \quad (5.3.21)$$

が得られる。ここで、 $Di$ : は**散逸数** (Dissipation number)

$$Di = \frac{\alpha_r g h}{C_p} \quad (5.3.22)$$

$\Gamma$ は**熱力学的グリユナイゼンパラメータ**

$$\Gamma = \frac{\alpha_r K_S}{\bar{\rho}C_p} = \frac{\alpha_r K_T}{\bar{\rho}C_v} \quad (5.3.23)$$

である。熱力学的グリユナイゼンパラメータは

$$\begin{aligned} \frac{K_T \alpha_r}{\bar{\rho}C_v} &= v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p / \frac{1}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \\ &= v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p / \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \\ &= v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v / \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = v \left( \frac{\partial p}{\partial u} \right)_v \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

となるので、単位体積当たり内部エネルギーの圧力微分係数の逆数となっている。

(5.3.21)の右辺が一定の時には、

$$\bar{\rho}' = \exp \left[ \frac{Di}{\Gamma} z' \right] \quad (5.3.25)$$

となる。この式は非弾性近似における連続の式と一致した。密度の変化する垂直スケール(スケールハイト)は、

$$h_d = \frac{\Gamma}{Di} h \quad (5.3.26)$$

である。ここで、マンツルの厚さがスケールハイトと比べて小さい、すなわち、

$$h_d = \infty \quad (5.3.27)$$

なら深さ方向の圧縮性も無視することが出来る。これは、

$$\frac{Di}{\Gamma} = 0 \quad (5.3.28)$$

とした近似である。この時、連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.3.29)$$

となる。これが、拡張ブジネスク近似である。マントル全層に対してはマントル物性から

$$Di \approx 0.5 \quad (5.3.30)$$

$$\Gamma \approx 1.0 \quad (5.3.31)$$

程度と見積られる。そのため、全マントル対流に対する拡張ブジネスク近似はあまり良い近似と言うことは出来ないことに注意すべきである。上部マントルのみの対流を考える場合にはある程度良い近似となっている。

#### (4) 運動方程式

運動方程式の無次元化を考える。運動方程式は長いので、それぞれの項を別々に考え、スケーリングの式を代入する。

慣性項は

$$\bar{\rho} \frac{dv}{dt} = \rho_r \bar{\rho}' \frac{\kappa}{h} \frac{\kappa}{h^2} \frac{dv'}{dt'} = \rho_r \frac{\kappa^2}{h^3} \bar{\rho}' \frac{dv'}{dt'} \quad (5.3.32)$$

圧力勾配項は

$$-\nabla P = -\frac{1}{h} \eta_r \frac{\kappa}{h^2} \nabla' P' = -\frac{\eta_r \kappa}{h^3} \nabla' P' \quad (5.3.33)$$

粘性項は

$$\begin{aligned} & \left[ \eta \left\{ (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla \\ &= \eta_r \frac{1}{h^2} \frac{\kappa}{h} \left[ \eta' \left\{ (\nabla' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \nabla') - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{v}') \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla' \\ &= \frac{\eta_r \kappa}{h^3} \left[ \eta' \left\{ (\nabla' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \nabla') - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{v}') \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla' \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

となる。圧力勾配項と粘性項の共通するスケールで運動方程式の慣性項と浮力項を割る。

$$\rho_r \frac{\kappa^2}{h^3} \frac{h^3}{\eta_r \kappa} \bar{\rho}' \frac{dv'}{dt'} = \frac{\rho_r \kappa}{\eta_r} \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{Pr} \frac{dv'}{dt'} \quad (5.3.35)$$

である。一方、浮力項は

$$\begin{aligned}
& \Delta \rho g \frac{h^3}{\eta_r \kappa} \\
&= -\rho_r \alpha_r \Delta T g \frac{h^3}{\eta_r \kappa} \cdot \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \rho_r g \frac{K_s}{K_T} \frac{1}{K_s} \frac{\eta_r \kappa}{h^2} \frac{h^3}{\eta_r \kappa} \cdot \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \\
&= -\frac{\rho_r \alpha_r \Delta T g h^3}{\eta_r \kappa} \cdot \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \rho_r g \frac{K_s}{K_T} \frac{h}{K_s} \cdot \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \\
&= -\frac{\rho_r \alpha_r \Delta T g h^3}{\eta_r \kappa} \cdot \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \frac{C_p}{C_s} \frac{\alpha g h}{C_p} \frac{\rho_r C_p}{\alpha K_s} \cdot \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \\
&= -Ra \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \frac{C_p}{C_s} \frac{Di}{\gamma} \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \tag{5.3.36}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $Pr$  は前出のプラントル数、 $Ra$  は熱レイリー数

$$Ra = \frac{\rho_r \alpha_r \Delta T g h^3}{\eta_r \kappa} \tag{5.3.37}$$

である。熱レイリー数は熱浮力項のスケールと粘性項のスケールの比である。

上述の項をすべてまとめると、運動方程式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Pr} \frac{dv'}{dt'} &= -\nabla' P' + \left[ \eta' \left\{ (\nabla' v' + v' \nabla') - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot v') \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla' \\
&- Ra \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \frac{C_p}{C_s} \frac{Di}{\gamma} \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \tag{5.3.38}
\end{aligned}$$

が得られる。ここでプラントル数を無限大とすると、マンタル対流の無次元化した運動方程式

$$\begin{aligned}
0 &= -\nabla' P' + \left[ \eta' \left\{ (\nabla' v' + v' \nabla') - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot v') \mathbf{I} \right\} \right] \cdot \nabla' \\
&- Ra \bar{\rho}' \alpha' T' g' + \frac{C_p}{C_s} \frac{Di}{\gamma} \bar{\rho}' \frac{1}{K_T'} p' g' \tag{5.3.39}
\end{aligned}$$

が得られる。この式は、非弾性近似を用いた式である。

拡張ブジネス近似の時には、(5.3.27)より、

$$0 = -\nabla' P' + \left[ \eta' \{ (\nabla' v' + v' \nabla') \} \right] \cdot \nabla' - Ra \bar{\rho}' \alpha' T' g' \tag{5.3.40}$$

となる。ブジネス近似の式も同じである。

## (5) エネルギー方程式

最後はエネルギー方程式である。運動方程式と同様、それぞれの項を別々に考える。時間微分項は

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \rho_r C_p \Delta T \frac{\kappa}{h^2} C_p' \frac{dT'}{dt'} \quad (5.3.41)$$

である。断熱温度勾配項は

$$\alpha T v_3 \bar{\rho} g = \alpha_r \Delta T \frac{\kappa}{h} \rho_r g \cdot \alpha' (T' + T_0') v_3' \bar{\rho}' \quad (5.3.42)$$

となる。右辺の熱伝導項は

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \left( \frac{1}{h^2} \rho_r C_p \kappa \Delta T \right) \nabla' \cdot (k' \nabla' T') \quad (5.3.43)$$

であり、内部加熱項は

$$\rho h^{int} = \rho_r \frac{k \Delta T}{\rho_r h^2} \bar{\rho}' h^{int'} = \frac{\rho_r C_p \kappa \Delta T}{h^2} \bar{\rho}' h^{int'} \quad (5.3.44)$$

である。散逸項は

$$\Phi = 2\eta D_{ij}' D_{ij}' = \eta_r \left( \frac{\kappa}{h^2} \right)^2 \cdot 2\eta' D_{ij}'' D_{ij}'' \quad (5.3.45)$$

となる。(5.3.40) (5.3.42) (5.3.43)のスケールは同じなので、このスケールで断熱温度勾配項を割ると、

$$\begin{aligned} \alpha_r \Delta T \frac{\kappa}{h} \rho_r g \frac{h^2}{\rho_r C_p \Delta T \kappa} \cdot \alpha' (T' + T_0') v_3' \bar{\rho}' &= \frac{\alpha_r g h}{C_p} \cdot \alpha' (T' + T_0') v_3' \bar{\rho}' \\ &= Di \bar{\rho}' \alpha' (T' + T_0') v_3' \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

となる。ここで  $Di$  は前出の散逸数である。散逸項については、

$$\begin{aligned} 2\eta_r \left( \frac{\kappa}{h^2} \right)^2 \frac{h^2}{\rho_r C_p \Delta T \kappa} \cdot 2\eta' D_{ij}'' D_{ij}'' &= \frac{\alpha_r g h}{C_p} \frac{\kappa \eta_r}{\rho_r \alpha_r \Delta T g h^3} \cdot 2\eta' D_{ij}'' D_{ij}'' \\ &= \frac{Di}{Ra} \cdot 2\eta' D_{ij}'' D_{ij}'' = \frac{Di}{Ra} \Phi' \end{aligned} \quad (5.3.47)$$

となる。ここでも散逸数が現れる。

それぞれの項をまとめると、非弾性近似における無次元化したエネルギー方程式

$$\begin{aligned} \bar{\rho}' C_p' \frac{dT'}{dt'} + Di \bar{\rho}' \alpha' (T' + T_0') v_3' \\ = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') + \bar{\rho}' h^{int'} + 2 \frac{Di}{Ra} \eta' D_{ij}'' D_{ij}'' \end{aligned} \quad (5.3.48)$$

が得られる。この式は拡張ブジネスク近似でも同じである。ブジネスク近似の時は、

$$Di = 0 \quad (5.3.49)$$

として,

$$\bar{\rho}' C_p' \frac{dT'}{dt'} = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') + \bar{\rho}' h^{int'} \quad (5.3.50)$$

となる。Di が断熱温度勾配項と散逸項の両方に掛かっているために、どちらの項もなくなってしまう。ブジネス近似を使用する場合には、両方落とさないとエネルギー保存が厳密に成立しなくなってしまう。

### (6) 自転の影響

大気の運動には自転が大きな影響を与えている。自転は回転座標系における見かけの力である、コリオリ力として地球上の運動する物体に働く。ここでは、マントル対流に対してコリオリ力がどの程度影響を与えているのか見積もる。

コリオリ力の項は

$$\rho f_c = 2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (5.3.51)$$

のように書ける。スケーリングをすると,

$$2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} = \rho_r \frac{\kappa}{h} \Omega_0 \cdot \bar{\rho}' \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}' \quad (5.3.52)$$

であるので、これを圧力勾配項・粘性項のスケール割ると,

$$\rho_r \frac{\kappa}{h} \Omega_0 \cdot \frac{h^3}{\eta_r \kappa} \cdot \bar{\rho}' \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}' = \frac{\rho_r \Omega_0 h^2}{\eta_r} \cdot \bar{\rho}' \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}' = \frac{1}{Ek} \bar{\rho}' \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}' \quad (5.3.53)$$

ここで、 $Ek$  は**エクマン数**であり、粘性力のスケールのコリオリ力のスケールに対する比である。すなわち,

$$Ek = \frac{\eta_r}{\rho_r \Omega_0 h^2} \quad (5.3.54)$$

である。マントルの典型的な値を入れると、エクマン数は  $10^8$  程度であり、コリオリ力は粘性の高いマントル対流において無視できるほど小さいことが分かる。

### (7) 慣性の影響

エネルギー方程式と結合して解かなければならない対流の問題では、慣性項にプラントル数という無次元数が現れる。ここでは、エネルギー方程式が現れない問題を考える。簡単のため、密度と粘性率が一定である非圧縮性流体で、体積力も 0 であるとする。この場合の運動方程式は,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.3.55)$$

である。この場合には、連続の式と組み合わせると解くことが出来る。ここで、慣性項と粘性項の比を考える。このとき、速度のスケールは典型的な速度  $V_0$  を用いる。

典型的な長さを  $L$  とすると、時間は

$$t = \frac{L}{V_0} t' \quad (5.3.56)$$

とスケールされる。これを用いると、移流項は

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho_r \frac{V_0^2}{L} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \right] \quad (5.3.57)$$

粘性項は

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} = \eta_r \frac{V_0}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v}' \quad (5.3.58)$$

となる。移流項のスケールを粘性項のスケールで割ると

$$Re = \rho_r \frac{V_0^2}{L} / \eta_r \frac{V_0}{L^2} = \frac{\rho_r V_0 L}{\eta_r} = \frac{V_0 L}{\nu} \quad (5.3.59)$$

という無次元数が現れる。この無次元数を**レイノルズ数**という。レイノルズ数を用いて運動方程式を無次元化すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}' \quad (5.3.60)$$

となる。レイノルズ数が大きくなるほど粘性項の作用は小さくなり、流体の慣性が重要になることを意味している。慣性項のうち、移流項は非線型性を持つので、乱流を発生させる原因となる。すなわち、**乱流**はレイノルズ数が大きいとき発生する。

ここから先の式は無次元表示の場合でもプライムを省略する。レイリー数などの無次元数が入っているときは無次元の式を表すことに注意する。

(8) 無次元数のまとめ

レイリー数：熱浮力と粘性力のスケールの比

$$Ra = \frac{\rho_r \alpha_r \Delta T g h^3}{\eta_r \kappa} \quad (5.3.61)$$

プラントル数：運動量拡散と熱拡散との比

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\eta_r C_p}{k} \quad (5.3.62)$$

散逸数：断熱温度勾配による温度の増加と上下の温度差との比

$$Di = \frac{\alpha_r g h}{C_p} \quad (5.3.63)$$

熱力学的グリユナイゼンパラメータ：単位体積当たり内部エネルギーの圧力微分係数の逆数

$$\Gamma = \frac{\alpha_r K_S}{\bar{\rho} C_p} = \frac{\alpha_r K_T}{\bar{\rho} C_v} \quad (5.3.64)$$

散逸数と組み合わせると圧力による密度変化のスケールハイトと高さの比となる。

エクマン数：粘性力とコリオリ力のスケールの比

$$Ek = \frac{\eta_r}{\rho_r \Omega_0 h^2} \quad (5.3.65)$$

レイノルズ数：慣性力と粘性力のスケールの比

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad (5.3.66)$$

## 5.4 その他方程式の簡略化

### (1) 粘性率一定

ブジネスク近似において粘性率が一定である場合を考える。また、密度や熱伝導率も一定とすると、運動方程式は

$$0 = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{v} - RaT\mathbf{g} \quad (5.4.1)$$

である。エネルギー方程式は、

$$\frac{dT}{dt} = \nabla^2 T + h^{int} \quad (5.4.2)$$

となる。

### (2) 2次元非圧縮性流体

2次元の非圧縮性流体を考える。このとき、次のような流線関数を導入する。

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (5.4.3)$$

(5.2.18)あるいは(5.3.39)の  $x_1$  成分を  $x_3$  で微分したものから  $x_3$  成分を  $x_1$  で微分したものを引いた式、つまり運動方程式の回転をとった式に(5.4.3)を代入すると、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left[ \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = g \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \quad (5.4.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left[ \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = -Ra\bar{\rho}\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (5.4.5)$$

となる。つまり、流線関数に関する4階偏微分方程式となっている。この式は一般化された重調和方程式(generalized biharmonic equation)と呼ばれることがある。粘性率一定( $\eta=1$ )のときには、

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} \right) \Psi + 4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} = -Ra\bar{\rho}\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (5.4.6)$$

整理すると、

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} \right) \Psi = -Ra\bar{\rho}\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (5.4.7)$$

すなわち、

$$\nabla^4 \Psi = -Ra\bar{\rho}\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (5.4.7)$$

となる。

渦度

$$\omega = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (5.4.7)$$

を導入すると, (5.4.7) は2つのポワソン方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\omega = -Ra\bar{\rho}\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.4.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Psi = \omega \quad (5.4.9)$$

に分けることができる。式を2階微分方程式に分けたことによって、一般的な反復法などの数値解法を使うことは可能になるが、境界条件の適用が難しくなることもある。例えば、固着境界の場合、境界の渦度は速度によって変化し、渦度の境界条件を扱うのが難しくなる。カーテシアン座標系において自由滑り境界の場合、境界の渦度を0とおけるので、境界条件の扱いは簡単である。

## 5.5 マントル対流の問題

### (1) 対流の開始：線型安定性解析

2つの温度の異なる板に挟まれた流体を考える。ここでは、2次元のモデルを考える。下面の温度は上面より高いとき、対流が起こるのか否かについて考える。ブジネスク近似を仮定して良く、また粘性率一定であると、マントル対流の運動方程式は(5.4.1)

$$\frac{1}{Pr} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{v} - Ra T \mathbf{g} \quad (5.5.1)$$

である。

このとき、前項と同様、両辺の回転をとると、

$$\frac{1}{Pr} \frac{d}{dt} (\nabla^2 \Psi) = \nabla^4 \Psi + Ra \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (5.5.2)$$

となる。この式とエネルギー方程式(5.4.2)を用いる。対流の起こり初めなので、流線および温度を深さ平均とそれからの擾乱に分けて考える。すなわち、

$$\Psi = \Psi' \quad (5.5.3)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (5.5.4)$$

を考える。擾乱の2乗の項を無視すると、

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi') = \nabla^4 \Psi' + Ra \frac{\partial T'}{\partial x_1} \quad (5.5.5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial x_3^2} \quad (5.5.6)$$

となる。対流の開始は中立点を求めれば良いので、(5.5.5) (5.5.6)の左辺の時間微分を0としてよい。一方、平均温度は定常熱伝導状態の温度であるので、

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} = 1 \quad (5.5.7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3^2} = 0 \quad (5.5.8)$$

である。これらを考慮すると、運動方程式は結局、

$$0 = \nabla^4 \Psi' + Ra_c \frac{\partial T'}{\partial x_1} \quad (5.5.9)$$

となる。この式はプラントル数を含んでいないので、対流の開始はプラントル数に依存しないことが分かる。ここで  $Ra_c$  は臨界レイリー数である。さらに、エネルギー方程式は

$$-\frac{\partial \Psi'}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial x_3^2} \quad (5.5.10)$$

である。対流の開始が基本モードであると考え、

$$\Psi' = \Psi_1 \sin(\pi z) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.5.11)$$

$$T' = T_1 \sin(\pi z) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.5.12)$$

とにおいて、(5.5.9) (5.5.10)に代入すると、

$$\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right)^2 \Psi_1 + \frac{2\pi}{\lambda} Ra_c T_1 = 0 \quad (5.5.13)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Psi_1 + \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right) T_1 = 0 \quad (5.5.14)$$

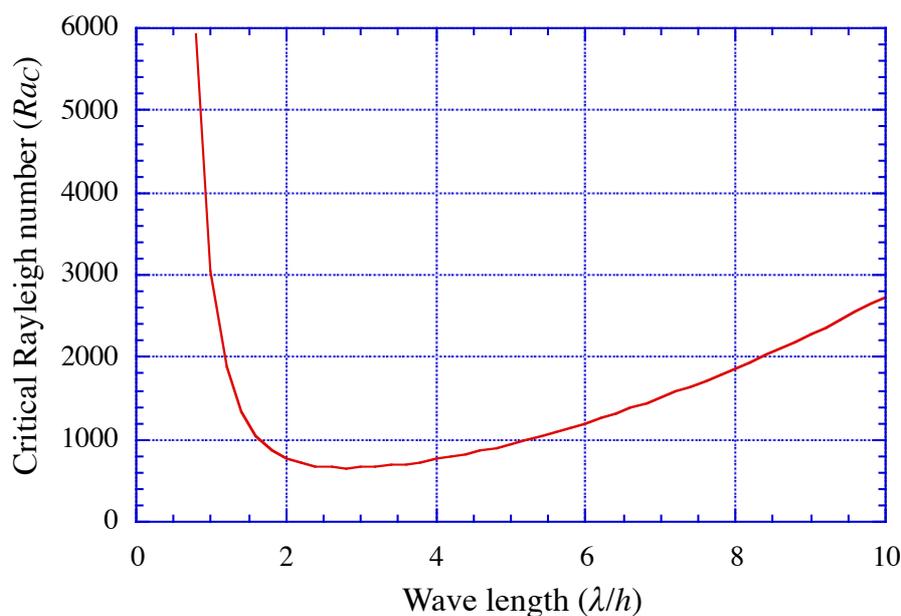
となる。この連立1次方程式が自明でない解を持つために、係数行列式は0でなければならない。すなわち、

$$\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right)^3 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ra_c = 0 \quad (5.5.15)$$

であり、 $Ra_c$ は

$$Ra_c = \frac{\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right)^3}{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}} \quad (5.5.16)$$

となる。臨界レイリー数は $\lambda = 2\sqrt{2}$ のとき、657で最小となる。このため、 $1:\sqrt{2}$ のアスペクト比を持つ対流セルが形成されやすい。



臨界レイリー数の波長への依存性

## (2) 有限振幅理論：境界層理論

マンツルのように粘性率が高く、熱拡散係数が小さい場合を考える。対流は、図のように速度勾配は全体に広がり、温度勾配は境界付近に集中した構造を持つ。温度勾配の集中した層は熱境界層(thermal boundary layer)という。熱境界層の内側の部分は断熱的であり、断熱核と呼ばれる。圧縮性を完全に無視できる場合には、この部分は等温であり、等温核と呼ばれている。

境界層と等温核の間の力の釣り合いを考える。垂直になった境界層の浮力  $B$  が水平な境界層と垂直な境界層の2つの部分の粘性抵抗  $F_R$  と釣り合うことから、力の釣り合いは

$$2F_R - B = 0 \quad (5.5.17)$$

である。熱境界層に働く粘性応力  $\tau$  は速度  $v_1$  と粘性率  $\eta$  を用いて

$$\tau = 2\eta D_{12} = 2\eta \left( \frac{1}{2} \frac{v_1}{h/2} \right) = \frac{2\eta v_1}{h} \quad (5.5.18)$$

と書ける。よって、熱境界層1つに働く粘性抵抗は

$$F_R = h \frac{2\eta v_1}{h} = 2\eta v_1 \quad (5.5.19)$$

である。温度はプレートの半無限体冷却モデルから、

$$T = \frac{\Delta T}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{x_3}{2\sqrt{\kappa t}} \right] = \frac{\Delta T}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{x_3}{2\sqrt{\kappa h/v_1}} \right] \quad (5.5.20)$$

と表される。温度を積分して密度  $\rho_r$  と熱膨張率  $\alpha$  を掛けると熱境界層の浮力が得られる。すなわち、浮力は

$$B = \int_0^\infty \rho_r \alpha T(x_3) g dx_3 = \rho_r \alpha \Delta T g \sqrt{\frac{\kappa h}{\pi v_1}} \cdot h \quad (5.5.21)$$

である。(5.5.19)と(5.5.21)とを(5.5.17)に代入して整理すると、

$$v_1 = \rho_r \alpha \Delta T g \sqrt{\frac{\kappa h}{\pi v_1}} \frac{h}{4\eta} \quad (5.5.22)$$

となる。よって、速度は

$$v_1^{3/2} = \rho_r \alpha \Delta T g \sqrt{\frac{\kappa h}{\pi v_1}} \frac{h^{3/2}}{4\eta} \quad (5.5.23)$$

となる。速度のスケール  $\kappa/h$  で速度を割ると、レイリー数  $Ra$  が現れる。

$$\left( \frac{v_1}{\kappa/h} \right)^{3/2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\rho_r \alpha \Delta T g h^3}{\kappa \eta} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} Ra \quad (5.5.24)$$

無次元速度は

$$v'_1 = \frac{v_1}{\kappa/h} = \frac{1}{4^{2/3} \pi^{1/3}} Ra^{2/3} \quad (5.5.25)$$

となり、速度はレイリー数の  $2/3$  乗に比例するという結果が得られる。ここで、表面の熱流量  $Q$  は熱伝導率  $k$  と温度勾配  $\partial T/\partial x_3$  をかけることにより、

$$Q = k \frac{\Delta T/2}{\sqrt{\pi \kappa t}} = k \frac{\Delta T/2}{\sqrt{\pi \kappa h/v_1}} \quad (5.5.26)$$

となっている。 $Q$  の平均をとると、

$$\bar{Q} = \frac{k \Delta T}{h} \sqrt{\frac{h v_1}{\pi \kappa}} = Q_{cond} \sqrt{\frac{h v_1}{\pi \kappa}} \quad (5.5.27)$$

となる。ここで  $Q_{cond}$  は対流が起きていないとき、つまり熱が伝導のみで輸送される場合の熱流量である。ここで、熱境界層の平均厚さを平均熱流量  $\bar{Q}$  から

$$\delta = k \frac{\Delta T/2}{\bar{Q}} \quad (5.5.28)$$

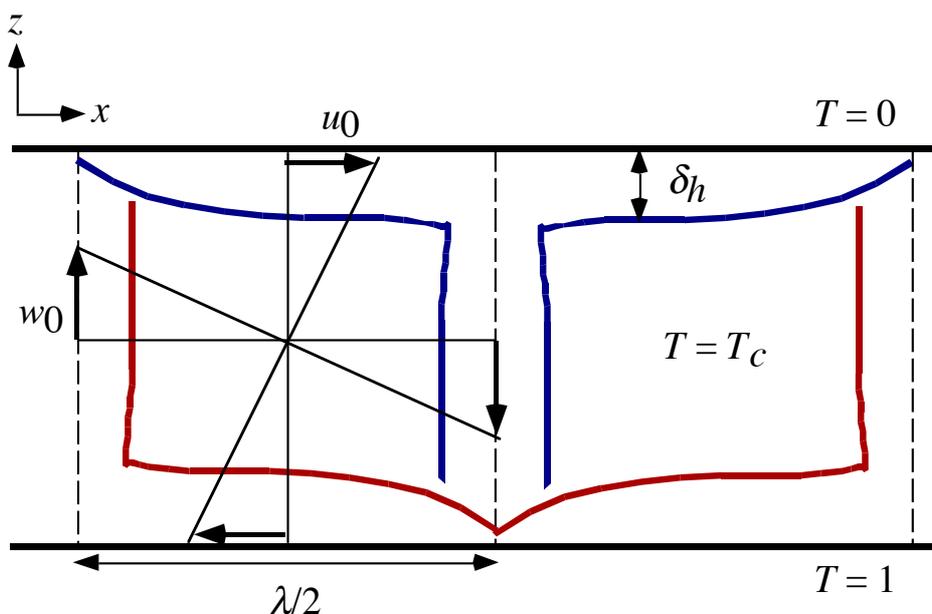
と定義する。熱境界層の平均厚さは無次元では、

$$\delta' = \frac{\delta}{h} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{h v_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{v_1'}} = \frac{\pi^{2/3}}{2^{1/3}} Ra^{-1/3} \quad (5.5.29)$$

となり、レイリー数の  $1/3$  乗に反比例することが分かる。 $\bar{Q}$  と  $Q_{cond}$  の比をヌッセルト数(Nusselt number)という。ヌッセルト数は

$$Nu = \frac{\bar{Q}}{Q_{cond}} = \frac{Ra^{1/3}}{2^{2/3} \pi^{2/3}} \quad (5.5.30)$$

レイリー数の  $1/3$  乗に比例して大きくなる。これは、レイリー数は高さ  $h$  の  $3$  乗に比例し、熱拡散率  $\kappa$  に反比例することに由来する。



マントル対流の境界層モデル

本文と  $z(x_3)$  軸の方向が異なり、記号も異なることに注意。

## 5.6 その他の簡単な粘性流体の問題

### (1) 2つの平板間の流れ

2つの水平な平板に囲まれた粘性流体を考える。2つの平板のうち、下面の平板は静止し、上面のみが  $v_0$  で動いているとする。レイノルズ数が十分に低く、層流であるとする。また、体積力が働いていない場合を考える。定常状態のとき、解くべき式は、(5.3.53)より、

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{d^2 v_1}{dx_3^2} \quad (5.6.1)$$

である。圧力勾配を一定

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_0}{l} \leq 0 \quad (5.6.2)$$

とする。値が負であるのは右向きに圧力が流体を押ししていることを意味する。(5.6.1)の解は、

$$v_1 = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} x_3^2 + c_1 x_3 + c_2 \quad (5.6.3)$$

である。境界条件

$$v_1 = 0 \quad (x_3 = 0) \quad (5.6.4)$$

$$v_1 = v_0 \quad (x_3 = h) \quad (5.6.5)$$

(5.6.4)を当てはめると、

$$c_2 = 0 \quad (5.6.6)$$

が得られる。(5.6.5)と(5.6.6)を用いると、

$$v_0 = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} h^2 + c_1 h \quad (5.6.7)$$

より、

$$c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} h \quad (5.6.8)$$

が得られるので、速度は

$$v_1 = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (x_3^2 - hx_3) + \frac{v_0}{h} x_3 \quad (5.6.9)$$

となる。

圧力勾配が0のとき、速度は

$$v_1 = \frac{v_0}{h} x_3 \quad (5.6.10)$$

となる。このような流れは**コエット流** (Couette flow)として知られる。

## (2) パイプの中の流れ

ここでは円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。 $r$  はパイプの半径方向,  $z$  は伸長方向とする。今,  $z$  方向の流れを考える。また,  $\theta$  方向には変化がないとする。半径方向に垂直な面に働く  $z$  方向の応力は

$$\tau_{rz} = \eta \frac{dv_z}{dr} \quad (5.6.11)$$

である。 $z$  方向の粘性力は

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

であるので, 運動方程式は

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (5.6.12)$$

となる。少し変形すると,

$$\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \quad (5.6.13)$$

となるが, この式に

$$v_z = ar^2 \quad (5.6.14)$$

を代入すると

$$\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = 2a + 2a = 4a \quad (5.6.15)$$

より,

$$a = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} \quad (5.6.16)$$

となるので, (5.6.13)は

$$v_z = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} r^2 + c \quad (5.6.17)$$

という解を持つことが分かる。任意定数は

$$0 = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} R^2 + c \quad (5.6.18)$$

より,

$$c = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} R^2 \quad (5.6.19)$$

と求められる。パイプの中の層流の流速は  $v_z$  は,

$$v_z = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (r^2 - R^2) \quad (5.6.20)$$

のように放物面の分布を持つことが分かる。 $r$ で積分すると、流量

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^R v_z \cdot 2\pi r \, dr = 2\pi \int_0^R \left[ \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (r^2 - R^2) \right] \cdot r \, dr \\
 &= \frac{\pi}{2\eta} \frac{dp}{dz} \int_0^R (r^3 - R^2 r) \, dr = \frac{\pi}{2\eta} \frac{dp}{dz} \left( \frac{1}{4} [r^4]_0^R - \frac{1}{2} R^2 [r^2]_0^R \right) \\
 &= -\frac{\pi}{8\eta} \frac{dp}{dz} R^4
 \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

が求められる。