４．地球科学への応用：弾性体

4.1 弾性体の平衡形状

(1) 1 軸伸張(圧縮)

線型弾性体の構成方程式は,

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{4.1.1}$$

である。法線応力のみが働いているとすると,

$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \tag{4.1.2}$$

$$T_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \tag{4.1.3}$$

$$T_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} \tag{4.1.4}$$

である。今, 1 軸のみ応力が掛かっている**一軸応力状態を**考える。すなわち,

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \tag{4.1.5}$$

$$T_{22} = T_{33} = 0 \tag{4.1.6}$$

のとき,

$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + 2\lambda\varepsilon_{22} \tag{4.1.7}$$

$$0 = \lambda\varepsilon_{11} + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{22} \tag{4.1.8}$$

である。(4.1.8)より,

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon_{11} \tag{4.1.9}$$

が得られるので, (4.1.7)に代入すると,

$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)}\varepsilon_{11} \tag{4.1.10}$$

となり, ε_{11} は

$$T_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}\varepsilon_{11} = E\varepsilon_{11} \tag{4.1.11}$$

から計算することができる。ここで,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \tag{4.1.12}$$

はヤング率(Young modulus)である。一軸圧縮に対する弾性係数を意味する。また, (4.1.9)より, ε_{11} と ε_{22}, ε_{33} は

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \tag{4.1.13}$$

という関係を持つ。ここで, νはポワッソン比(Poisson ratio) であり, ラメの弾性率を用いると

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{4.1.14}$$

と表される。

$$\lambda = \mu \tag{4.1.15}$$

のとき，νは 0.25 であり，このような固体はポワッソン固体と呼ばれる。

(2) 平面応力

式は，法線歪を未知数とする連立 1 次方程式と考えることが出来るので，解をヤング率とポワッソン比を用いて表すと，

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}T_{11} - \frac{\nu}{E}T_{22} - \frac{\nu}{E}T_{33} \tag{4.1.16}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}T_{11} + \frac{1}{E}T_{22} - \frac{\nu}{E}T_{33} \tag{4.1.17}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}T_{11} - \frac{\nu}{E}T_{22} + \frac{1}{E}T_{33} \tag{4.1.18}$$

となる。

$$T_{33} = 0 \tag{4.1.19}$$

の時を**平面応力状態**と呼ぶ。このとき，

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(T_{11} - \nu T_{22}\right) \tag{4.1.20}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(T_{22} - \nu T_{11}\right) \tag{4.1.21}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\left(T_{11} + T_{22}\right) \tag{4.1.22}$$

特に，

$$T_{11} = T_{22} \tag{4.1.23}$$

の時は，

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1-\nu}{E}T_{11} \tag{4.1.24}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E}T_{11} \tag{4.1.25}$$

である。

今，テクトニックな要因により，２つの等しい水平応力ΔT_{11}とΔT_{22}が働く場合を考える。この時，リソスフェアの底面に働く垂直応力 T_{33} がどの程度変動するか計算する。垂直応力の変動ΔT_{33}は，水平応力による圧力の変動に等しい。深さ h_L にはたらく

圧力は，A を底面積として

$$p=\frac{Mg}{A}=\rho g h_L \tag{4.1.26}$$

なので，圧力の変動をδp と書くと，

$$\Delta T_{33}=\delta p=\delta\left(\rho g h_L\right)=\delta\left(\rho h_L A\cdot\frac{1}{A}\right)g$$

$$=\frac{1}{A}\delta\left(\rho h_L A\right)g+\rho h_L A\delta\left(\frac{1}{A}\right)g \tag{4.1.27}$$

と表される。ここで，質量保存則より，

$$\delta M=\delta\left(\rho h_L A\right)=0 \tag{4.1.28}$$

に注意すると，

$$\delta p=\rho h_L A\delta\left(\frac{1}{A}\right)g$$

$$=\rho g h_L A\left(-\frac{1}{A^2}\right)\delta A=\rho g h_L\left(-\frac{\delta A}{A}\right) \tag{4.1.29}$$

となる。ところで，面積の変化率は

$$\frac{\delta A}{A}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}=\frac{2(1-\nu)}{E}\Delta T_{11} \tag{4.1.30}$$

を考慮すると，

$$\Delta T_{33}=-\rho g h_L\frac{2(1-\nu)}{E}\Delta T_{11} \tag{4.1.31}$$

となる。よって，水平応力の変動に対する垂直応力の変動の割合は

$$\frac{\Delta T_{33}}{\Delta T_{11}}=-\rho g h_L\frac{2(1-\nu)}{E} \tag{4.1.32}$$

となる。ここで，ヤング率 E = 100 GPa，密度ρ = 3000 kgm^{-3}，厚さ h_L = 100 km とすると，

$$\Delta T_{33}/\Delta T_{11}=0.045 \tag{4.1.33}$$

となる。すなわち，水平応力の変動に伴う垂直応力の変動は無視出来るほど小さいことが分かる。つまり，プレートは平面応力状態であると近似できることを意味する。

(3) 純粋剪断

平面応力状態において，

$$\varepsilon_{11}=-\varepsilon_{22} \tag{4.1.34}$$

のときは，**純粋剪断状態**と呼ばれる。この時は，応力も

$$T_{11}=-T_{22} \tag{4.1.35}$$

となっている。よって，

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} T_{11} \tag{4.1.36}$$

$$T_{11} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{11} \tag{4.1.37}$$

である。座標軸を 45 度回転すると，4.3 節の式より，

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{22} = 0 \tag{4.1.38}$$

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon_{11}$$

このとき，剪断応力は，

$$T'_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{11} \tag{4.1.39}$$

である。

4.2 薄い板の曲げ: プレートの形状

(1) 力の垂直成分の釣り合い

プレート内の長さ dx の部分に働く力とトルクが釣り合っている状態を考える (Schubert and Turcotte, 1982, Chap. 3, Fig. 3-10)。垂直方向の力の釣り合いは，

$$q(x_1)dx_1 + dV = 0 \tag{4.2.1}$$

$$\frac{dV}{dx_1} = -q(x_1) \tag{4.2.2}$$

である。ここで，

V: プレート内に働く剪断力 (net shear force)

$q, q(x_1)$: プレートに働く(単位長さ当たりの)荷重

である。それぞれの値は下向きが正である。また，x_1 軸はプレートの運動方向と反対向きに取られている。

(2) トルクの釣り合い

力のモーメントの釣り合いは

$$dM - Pdw = Vdx_1 \tag{4.2.3}$$

で表される。ここで，

M: プレート内に働く力のモーメント(曲げモーメント)

P: プレートに働く水平方向の力

w: プレート(基盤岩表面)の上下変位

である。(4.2.3)を dx で割ると，

$$\frac{dM}{dx_1} = V + P\frac{dw}{dx_1} \tag{4.2.4}$$

さらに x_1 で微分して，

$$\frac{d^2M}{dx_1^2} = \frac{dV}{dx_1} + \frac{d}{dx_1}\left(P\frac{dw}{dx_1}\right) \tag{4.2.5}$$

となる。(4.2.2)を代入すると，

$$\frac{d^2M}{dx_1^2} = -q + \frac{d}{dx_1}\left(P\frac{dw}{dx_1}\right) \tag{4.2.6}$$

曲げモーメント M は水平応力 T_{11} と曲げ中心からの距離との積を垂直(x_3)方向に積分したもの

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} T_{11} x_3 \, dx_3 \tag{4.2.7}$$

である。T_{11} は構成方程式(4.1.1)から求める。33 成分の式(4.2.10)に平面応力の条件

$$T_{33} = 0 \tag{4.2.8}$$

および，プレート運動に垂直な水平方向である x_2 軸方向には変形がないこと，すなわち，

$$\varepsilon_{22} = 0 \tag{4.2.9}$$

を仮定すると，

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon \tag{4.2.10}$$

であり，これを 11 成分の式(4.2.9)に代入すると，

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{11} \tag{4.2.11}$$

が得られる。ここで，ε_{11} は曲率半径を用いて表すと，

$$\varepsilon_{11} = \frac{x_3}{R} \tag{4.2.12}$$

となる。曲率半径はプレートの下向きの変位 w を用いて

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{4.2.13}$$

であるので，

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} x_3 \tag{4.2.14}$$

と表される。これを(4.2.9)に代入すると，

$$T_{11} = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} x_3 \tag{4.2.15}$$

となって，曲げモーメントの式に代入すると

$$M = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\int_{-h/2}^{h/2} x_3^2\, dx_3$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\left[\frac{x_3^3}{3}\right]_{-h/2}^{-h/2} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \qquad (4.2.16)$$

ここで，曲げ剛性

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \qquad (4.2.17)$$

を使うと，(4.2.16)は

$$M = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \qquad (4.2.19)$$

となる。

(3) 荷重の項

基盤岩が w だけ変位する場合の荷重を考える。ここでは，地形や堆積物の影響は無視する。地形により発生する圧力の変動 $p(w)$は，

$$p(w) = \left(\rho_w - \rho_m\right)w \qquad (4.2.20)$$

である。ここで，

ρ_w: 海水の密度

ρ_m:マントル(プレート)の密度

である。圧力差が生じる下向きの荷重の合計は

$$q = q_a + p(w) = q_a - \left(\rho_m - \rho_w\right)w \qquad (4.2.21)$$

となる。ただし，ρ_a は海山などイレギュラーな地形による荷重である。(4.2.21)を(4.2.6)に代入すると，

$$\frac{d^2 M}{dx_1^2} + \left(\rho_m - \rho_w\right)w = -q_a + \frac{d}{dx_1}\left(P\frac{dw}{dx_1}\right) \qquad (4.2.22)$$

が得られる。

テクトニックな原因で生じる P については一定と置いて良い。多くのモデルではこれを小さいと(< 500 MPa)考え P=0 としている (Conteras-Reyes and Osses, 2010)。イレギュラーな荷重も 0 であるとすると，この式は，

$$\frac{d^2 M}{dx_1^2} + \left(\rho_m - \rho_w\right)gw = 0 \qquad (4.2.23)$$

となり，(4.2.19)を代入すると，

$$D\frac{d^4w}{dx_1^4}-(\rho_m-\rho_w)gw=0 \tag{4.2.24}$$

となる。解を

$$w(x_1)=e^{\lambda x} \tag{4.2.25}$$

とおいて(4.2.24)に代入すると，特性方程式

$$D\lambda^4=(\rho_m-\rho_w)g$$

となり，これより，

$$\lambda=\pm\left[\frac{(\rho_m-\rho_w)g}{D}\right]^{\frac{1}{4}},\pm\left[\frac{(\rho_m-\rho_w)g}{D}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tag{4.2.26}$$

が得られる。解の物理的条件から，複素数のマイナスの値を採用し，

$$w(x_1)=\exp\left[-\left[\frac{(\rho_m-\rho_w)g}{4D}\right]^{\frac{1}{4}}x_1\right]$$
$$\times\left\{C_1\cos\left[\left[\frac{(\rho_m-\rho_w)g}{4D}\right]^{\frac{1}{4}}x_1\right]+C_2\sin\left[\left[\frac{(\rho_m-\rho_w)g}{4D}\right]^{\frac{1}{4}}x_1\right]\right\} \tag{4.2.27}$$

(4) 境界条件

x_1 =0 を海溝側境界，$x_1=-\infty$を海側境界とする。

$x_1=-\infty$において，

$$w=0 \tag{4.2.28}$$

$$\frac{dw}{dx_1}=0 \tag{4.2.29}$$

これらは変位，弾性応力が 0 であることを表す。x_1 =0 においては，

$$M=-M_0=-D\left.\frac{d^2w}{dx_1^2}\right|_{x_1=0} \tag{4.2.30}$$

$$V=-V_0=\left.\frac{dM}{dx_1}\right|_{x_1=0} \tag{4.2.31}$$

これらはスラブの負の浮力により発生するトルク及び縦剪断力である。ここで，解(4.2.27)を

$$w(x_1)=\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[C_1\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+C_2\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.32}$$

と置く。ここで，αは

$$\alpha=\left[\frac{4D}{(\rho_m-\rho_w)g}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.2.33}$$

である。境界条件を当てはめるために，(4.2.32)の２階，３階微分を作ると，

$$\frac{d^2w}{dx_1^2}=\frac{2}{\alpha^2}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[-C_2\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+C_1\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.34}$$

$$\frac{d^3w}{dx_1^3}=\frac{2}{\alpha^3}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[(C_1+C_2)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+(C_2-C_1)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.35}$$

となる。左端での(4.2.24)から境界条件は

$$-D\left.\frac{d^2w}{dx_1^2}\right|_{x_1=0}=-\frac{2D}{\alpha^2}\times(-C_2)=-M_0 \tag{4.2.36}$$

$$-D\left.\frac{d^3w}{dx_1^3}\right|_{x_1=0}=-\frac{2D}{\alpha^3}(C_1+C_2)=-V_0 \tag{4.2.37}$$

よって，任意定数 C_1, C_2 は，

$$C_1=\frac{\alpha^2}{2D}(M_0+V_0\alpha) \tag{4.2.38}$$

$$C_2=-\frac{\alpha^2}{2D}M_0 \tag{4.2.39}$$

解は

$$w(x_1)=\frac{\alpha^2\exp[-x_1/\alpha]}{2D}\left[-M_0\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+(V_0\alpha+M_0)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.40}$$

となる。

曲げモーメントは

$$M(x_1)=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

$$=-\exp[-x_1/\alpha]\left[M_0\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+(V_0\alpha+M_0)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.41}$$

となる。さらに，縦剪断力は，

$$V(x_1)=\frac{dM}{dx_1}$$

$$=\frac{\exp[-x_1/\alpha]}{\alpha}\left[-V_0\alpha\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)+(V_0\alpha+2M_0)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.42}$$

である。

(5) 地形による周期的な荷重とアイソスタシー

ここで，周期的な地形によるリソスフェアの変形を考える。地形による荷重は(4.2.22)式のイレギュラーな荷重として扱うことが出来る。地形を

$$H = H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \tag{4.2.43}$$

とすると，地形による下向きの荷重は

$$q_a = \rho_c g H = \rho_c g H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \tag{4.2.44}$$

である。モホ面の形状がリソスフェアの変形である。下向きに変形すると上向きの力となることに注意すると，荷重全体では，

$$q = q_a - \left(\rho_m - \rho_c\right)w = \rho_c g H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 - \left(\rho_m - \rho_c\right)w \tag{4.2.45}$$

となる。 (4.2.6)に代入し，テクトニック応力 P=0 とすると，

$$\frac{d^2M}{dx_1^2} = -\rho_c g H_0 g \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \left(\rho_m - \rho_c\right)w \tag{4.2.46}$$

を代入すると，

$$-D\frac{d^4w}{dx_1^4} = -\rho_c g H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \left(\rho_m - \rho_c\right)gw \tag{4.2.47}$$

より，

$$D\frac{d^4w}{dx_1^4} + \left(\rho_m - \rho_c\right)gw = \rho_c g H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \tag{4.2.48}$$

となる。解を

$$w = w_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \tag{4.2.49}$$

とおいて，(4.2.48)に代入すると，

$$D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 w_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \left(\rho_m - \rho_c\right)gw_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 = \rho_c g H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \tag{4.2.50}$$

より，sin 関数で割って

$$D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 w_0 + \left(\rho_m - \rho_c\right)gw_0 = \rho_c g H_0 \tag{4.2.51}$$

つまり，

$$\left[D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 + \left(\rho_m - \rho_c\right)g\right]w_0 = \rho_c g H_0 \tag{4.2.52}$$

となる。変形の最大値 w_0，すなわちモホ面の凹凸は，

$$w_0 = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c + \frac{D}{g}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} H_0 \tag{4.2.53}$$

と求められる。$\lambda \to \infty$ とすると，

$$w_\infty = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} H_0 \tag{4.2.53}$$

となって**アイソスタシー**の式に一致する。

$$C = \frac{w_0}{w_\infty} = \frac{\rho_m - \rho_c}{\rho_m - \rho_c + \frac{D}{g}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} \tag{4.2.54}$$

とすると，C は地形がアイソスタシーにより補償されている割合を表す。

$E = 70$ [GPa]

$\nu = 0.5$

$\rho_m = 3300$ [kg m^{-3}]

$\rho_c = 2800$ [kg m^{-3}]

$g = 9.8$ [km s^{-2}]

$h = 25$ [km] (リソスフェアの弾性的な厚さ)

とすると

$\lambda = 420$ [km]

で C=0.5 となる。C が 1 に近づくのはこの倍くらいの波長である。つまり，400km 程度よりも大きな地形は，アイソスタシーにより補償されていると考えて良いことになる。

4.3 弾性波動: 実体波

(1) P 波

弾性体の運動方程式において体積力を 0 として発散を取ると，

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla^2\Theta + \mu\nabla^2\Theta = (\lambda + 2\mu)\nabla^2\Theta \tag{4.3.1}$$

となる。すなわち，

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\nabla^2\Theta \tag{4.3.2}$$

であり，この式は波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = V_P^2 \nabla^2\Theta \tag{4.3.3}$$

である。すなわち，体積膨張率が波として伝播することを表している。これが**P 波**で

あり，その伝播速度は

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \tag{4.3.4}$$

となる。

(2) S 波

今度は回転を取ると，

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} = \mu \nabla \times \left(\nabla^2 \boldsymbol{u}\right) = \mu \nabla \times \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}\right) - \mu \nabla \times \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}$$

$$= -\mu \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Omega} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} - \mu \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) = \mu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \tag{4.3.5}$$

となる。すなわち，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \tag{4.3.6}$$

である。すなわち，ねじれが波として伝播することを表している。すなわち横波の**S 波**であり，その伝播速度は

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{4.3.7}$$

である。ポワッソン固体の時，すなわち，

$$\lambda = \mu \tag{4.3.8}$$

の時 P 波速度と S 波速度の関係は

$$V_P = \sqrt{3} V_S \tag{4.3.9}$$

となることが分かる。この関係は岩石に対してよく成り立っている。すなわち岩石はポワッソン固体であること意味する。

4.4 主応力・モール円・岩石の破壊

(1) 主応力

座標軸を回転させると応力テンソルの成分は変化する。今，2 次元の応力を考える。回転角θの座標変換は直交テンソル

$$\left(Q_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

で表される。変換後の応力テンソルは

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jm} T_{km} \tag{4.4.2}$$

と表される。行列表示で計算すると，

$$\left(T'_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}T_{11}\cos^2\theta+T_{22}\sin^2\theta+T_{12}\sin 2\theta & \dfrac{1}{2}\left(T_{22}-T_{11}\right)\sin 2\theta+T_{12}\cos 2\theta\\ \dfrac{1}{2}\left(T_{22}-T_{11}\right)\sin 2\theta+T_{12}\cos 2\theta & T\sin^2\theta+T_{22}\cos^2\theta-T_{12}\sin 2\theta\end{pmatrix} \qquad (4.4.3)$$

となる。非対角要素の値はθが

$$\tan 2\theta=-\frac{2T_{12}}{T_{22}-T_{11}} \qquad (4.4.4)$$

を満たすとき，0 となる。この時の座標軸を主応力軸と呼ぶ。(4.4.3)の 11 成分を少し変形すると，

$$T'_{11}=T_{11}\cos^2\theta+T_{22}\sin^2\theta+T_{12}\sin 2\theta \qquad (4.4.5)$$

$$=T_{11}\frac{1+\cos 2\theta}{2}+T_{22}\frac{1-\cos 2\theta}{2}+T_{12}\sin 2\theta \qquad (4.4.6)$$

$$=\frac{T_{11}+T_{22}}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\left(T_{11}-T_{22}+2T_{12}\tan 2\theta\right) \qquad (4.4.7)$$

となる。ここで，を２乗して

$$\tan^2 2\theta=\frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{1-\cos^2 2\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{1}{\cos^2 2\theta}-1 \qquad (4.4.8)$$

が得られるが，この式を変形すると，

$$\cos 2\theta=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} \qquad (4.4.9)$$

となる。この式に(4.4.4)を代入すると，

$$\cos 2\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4T_{12}^2}{\left(T_{22}-T_{11}\right)^2}}}=\pm\frac{T_{22}-T_{11}}{\sqrt{\left(T_{22}-T_{11}\right)^2+4T_{12}^2}} \qquad (4.4.10)$$

となる。(4.4.4) (4.4.10)を(4.4.7)に代入すると，

$$T_{1,2}=\frac{T_{11}+T_{22}}{2}\pm\frac{T_{22}-T_{11}}{\left[\left(T_{11}-T_{22}\right)^2+4T_{12}^2\right]^{1/2}}\left(T_{11}-T_{22}-2T_{12}\frac{2T_{12}}{T_{22}-T_{11}}\right)$$

$$=\frac{T_{11}+T_{22}}{2}\mp\sqrt{\frac{\left(T_{11}-T_{22}\right)^2}{4}+T_{12}^2} \qquad (4.4.11)$$

となる。ここで，+を T_1，-のときを T_2 とする。T_1と T_2は，それぞれ最大主応力，最小主応力と呼び，その方向を最大主応力軸，最小主応力軸と呼ぶ。主応力は座標軸を

回転して非対角成分をゼロとして得られることから，応力テンソルの固有値であることが分かる。すなわち，応力テンソルの特性方程式

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (T_{11}-\lambda)(T_{22}-\lambda) - T_{12}^2$$

$$= \lambda^2 - (T_{11}+T_{22})\lambda + T_{11}T_{22} - T_{12}^2 = 0 \qquad (4.4.12)$$

から求められる。この固有値を使う方法は，３次元の時に有効である。

ここでの議論は，対称テンソルである歪テンソルに対しても適用することが可能である。すなわち，歪テンソルにも主歪成分，歪主軸が存在する。

(2) モール円と破壊

今度は主応力を回転変換することを考える。ここでは，１軸圧縮試験にあるように x_1 軸方向に圧縮されること考える。ここでの議論において，応力の符号を，最初の定義に従って外向きが正としていることに注意して欲しい。この定義に従うと，圧縮される方が T_2 である。また，座標軸が主応力軸で，この座標から見ると剪断成分は 0 あることに注意しよう。このとき，応力テンソル成分は

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \qquad (4.4.13)$$

となっている。座標軸をθだけ回転した座標から見た応力は，(4.4.12)を，(4.4.3)に代入すると得られる。その法線応力成分は

$$T'_{11} = T_2\cos^2\theta + T_1\sin^2\theta$$

$$= \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_2-T_1}{2}\cos 2\theta = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_1-T_2}{2}\cos 2\theta \qquad (4.4.14)$$

$$T'_{22} = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_2-T_1}{2}\cos 2\theta = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\cos 2\theta \qquad (4.4.15)$$

剪断応力成分は

$$T'_{12} = -\frac{1}{2}(T_2-T_1)\sin 2\theta = \frac{1}{2}(T_1-T_2)\sin 2\theta \qquad (4.4.16)$$

となる。$\boldsymbol{T}$=(T_{22}, T_{12})により作られる曲線は，中心 $\boldsymbol{O}$ と半径 R がそれぞれ

$$\boldsymbol{O} = \left(\frac{T_1+T_2}{2}, 0\right) = (p, 0) \qquad (4.4.17)$$

$$R = \frac{1}{2}(T_1-T_2) = \frac{1}{2}T'_{max} \qquad (4.4.18)$$

の円を表す。この円を**モール円**と呼ぶ。その中心の x_1 座標は**封圧** p，半径は**最大差応**

力 T'_{max} の半分に対応する。角度θは x_1 軸から反時計回りに計る。角度の増加とともに剪断応力成分 T'_{12} が大きくなり，最大差応力となるθが 45°であることが分かる。

差応力を大きくしていくとモール円と**クーロンの破壊基準**

$$\sigma_F = \sigma_0 + cT_n \tag{4.4.19}$$

とが接触する。ここで

σ_0: 固着強度 (cohesive strength)

c: 摩擦係数 (friction coefficient)

T_n: 破断面の単位面積当たり垂直抗力

である。剪断応力成分がクーロンの破壊基準を超えたとき，岩石の破壊が起きる。単位面積当たりの垂直抗力は$-T'_{22}$であることに注意すると，

$$\left|T'_{12}\right| \geq \sigma_0 - cT'_{22} \tag{4.4.20}$$

である時，岩石の破壊が起こるということである。この時の角度θが岩石の破断面が作られる角度である。左辺が絶対値なのは２つの方向で割れる可能性があることを意味している。モール円の図を見ると，この時の角度は 45°よりも小さい角度(30 度位)であることが分かる。これは，破断面に垂直な x_2 軸が圧縮の弱い方向に近く，垂直抗力が最大差応力となる 45°の時よりも小さいからである。

参考文献

D. L. Turcotte, G. Schubert, Geodynamics, Second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

E. Conteras-Reyes, A. Osses, Lithospheric flexure modelling seaward of the Chile trench: implications for oceanic plate weakening in the Trench Outer Rise region, *Geophys. J. Int*, **187**, 97-112, 2010. (Section 4.3)

$$M\left(x_1\right) = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{-M_0\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha}\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{-M_0\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\left(V_0\alpha+M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{-\left(V_0\alpha+M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-M_0\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+M_0\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\left(V_0\alpha+M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{-\left(V_0\alpha+2M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-V_0\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right.$$

$$= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{\left(V_0\alpha+2M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+V_0\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{\left(V_0\alpha+2M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+V_0\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left\{-\left(V_0\alpha+2M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+V_0\alpha\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left[-\left(V_0\alpha+2M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+V_0\alpha\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right.$$

$$\left.-V_0\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\left(V_0\alpha+2M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$= -\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left[M_0\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.31}$$

となる。荷重は

$$V\left(x_1\right) = \frac{dM}{dx_1} = \frac{1}{\alpha}\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left[M_0\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\alpha}\exp\left[-x_1/\alpha\right]\left[-M_0\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\exp\left[-x_1/\alpha\right]$$

$$\times\left[M_0\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\left(V_0\alpha+M_0\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+M_0\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{\exp\left[-x_1/\alpha\right]}{\alpha}\left[-V_0\alpha\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\left(V_0\alpha+2M_0\right)\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \tag{4.2.32}$$

$$w(x_1) = \exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[C_1 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$\frac{dw}{dx_1} = -\frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[C_1 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[-C_1 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + C_2 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[(C_1 - C_2)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + (C_1 + C_2)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$\frac{d^2w}{dx_1^2} = \frac{1}{\alpha^2}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[(C_1 - C_2)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + (C_1 + C_2)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\alpha^2}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[-(C_1 - C_2)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + (C_1 + C_2)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$\frac{d^2w}{dx_1^2} = \frac{1}{\alpha^2}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[-2C_2 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + 2C_1 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$x_1 = 0$$

$$-D\left.\frac{d^2w}{dx_1^2}\right|_{x_1=0} = -\frac{D}{\alpha^2}\times(-2C_2) = M_0$$

$$C_2 = \frac{\alpha^2}{2D}M_0$$

$$\frac{d^3w}{dx_1^3} = -\frac{2}{\alpha^3}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[-C_2 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + C_1 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$+\frac{2}{\alpha^3}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[C_2 \sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + C_1 \cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$\frac{d^3w}{dx_1^3} == \frac{2}{\alpha^3}\exp\left[-\frac{x_1}{\alpha}\right]\left[(C_1 + C_2)\cos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + (C_2 - C_1)\sin\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right]$$

$$-D\left.\frac{d^3w}{dx_1^3}\right|_{x_1=0} = -\frac{2D}{\alpha^3}(C_1 + C_2) = V_0$$

$$C_1 + C_2 = -\frac{V_0\alpha^3}{2D}$$

$$C_1 = -\frac{\alpha^2}{2D}\left(M_0 + V_0\alpha\right)$$

$$C_2 - C_1 = -\frac{\alpha^2}{2D}\left(M_0 + V_0\alpha\right) + \frac{\alpha^2}{2D}M_0 = -\frac{\alpha^2}{2D}V_0\alpha$$