３．構成方程式と保存則の方程式

3.1 歪速度テンソル

微少な距離を持つ２点間の速度差は,

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = L_{ij} dx_j \tag{3.1.1}$$

$$d\boldsymbol{v} = \nabla \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{3.1.2}$$

ある時間での空間座標である。ここで

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{3.1.3}$$

は速度勾配テンソルである。対称部分と非対称部分に分けると,

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.1.4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.1.5}$$

$$= D_{ij} - W_{ij} \tag{3.1.6}$$

となる。ここで

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.1.7}$$

は歪速度テンソル,

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.1.8}$$

は回転速度テンソルあるいはスピンテンソルと呼ばれる。ベクトル形式では,

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla) \tag{3.1.9}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\nabla) \tag{3.1.10}$$

である。ベクトル形式を用いると,

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{x} - \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{v}) \times d\boldsymbol{x} \tag{3.1.11}$$

回転速度テンソルは渦度ベクトルで表すことができる。

歪テンソルは微少部分の変形前と変形後の長さ２乗の差から定義することができき

たが，同様に長さの２乗の変化の時間変化率を考えると，

$$\frac{d\boldsymbol{x}'^2 - d\boldsymbol{x}^2}{dt} = \frac{(d\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{v}dt)^2 - d\boldsymbol{x}^2}{dt} = 2d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{v} + \frac{(d\boldsymbol{v}dt)^2}{dt} \tag{3.1.16}$$

$$= 2d\boldsymbol{x}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = 2d\boldsymbol{x}\cdot D\cdot d\boldsymbol{x} \tag{3.1.17}$$

ここで $dt\to 0$ の極限を考えて後ろの項は落としている。添字形式では，

$$\frac{dx'^2 - dx^2}{dt} = 2dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \tag{3.1.18}$$

$$= 2dx_i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]dx_j + 2dx_i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]dx_j \tag{3.1.19}$$

$$= 2dx_i D_{ij} dx_j \tag{3.1.20}$$

となり，前項で導出した歪速度テンソルと一致する。ここで，回転速度テンソルは長さの変化つまり変形には寄与せず，歪速度テンソルのみ伸縮に寄与していることが分かる。

3.2 構成方程式と物質客観性の原理

歪や歪速度と応力との関係を記述する方程式を**構成方程式**と呼ぶ。これは物質の性質であるから、観測者の運動に依存してはならない。これを**物質客観性の原理**と呼ぶ。応力テンソルは対称テンソルであり，座標変換に対して

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T \tag{3.2.1}$$

という関係を満たす。ここで，$\boldsymbol{Q}$ は座標変換の直交テンソルである。構成方程式を

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}(\mathcal{X}) \tag{3.2.2}$$

と書くと，$\mathcal{X}$ は対称テンソルでなければならないことが分かる。つまり，$\boldsymbol{X}$ は歪テンソル $\boldsymbol{E}$ あるいは歪速度テンソル $\boldsymbol{D}$ でなければならず，構成方程式はこれらのテンソルのみの関数として表されることを意味する。つまり，

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}) \tag{3.2.3}$$

のような形を持つ。

3.3 線型弾性体

(1) 等方弾性体

線型弾性体 (歪が小さいとき) の構成方程式は

$$T_{ij} = C_{ijkm} D_{km} \tag{3.3.1}$$

と表される。C_{ijkm} は弾性係数テンソルである。等方的な場合には，弾性定数は２つの独立成分のみを持つ。この時，構成方程式は

$$T_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \tag{3.3.2}$$

λ, μ: **ラメ (Lamé)の第１・第２弾性定数**，特に，μは**剛性率**

と表される。ここで，Θは体積変化率

$$\Theta = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = div\boldsymbol{u} \tag{3.3.3}$$

である。(3.2.3)の対角和をとると，

$$T_{ii} = 3\lambda\Theta + 2\mu\Theta \tag{3.3.4}$$

$$-3p = (3\lambda + 2\mu)\Theta \tag{3.3.5}$$

$$-p = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\Theta \tag{3.3.6}$$

$$-p = K\Theta \tag{3.3.7}$$

圧力と体積変化率の関係から，体積弾性率 K

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{3.3.8}$$

が得られる。体積弾性率は等温変化と断熱変化では，

$$K_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \tag{3.3.9}$$

$$K_S = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \tag{3.3.10}$$

と定義される。体積弾性率と剛性率を用いると，以下のような構成方程式が得られる。

$$T_{ij} = K\Theta\delta_{ij} + 2\mu\left(E_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij}\right) = K\Theta\delta_{ij} + 2\mu E'_{ij} \tag{3.3.11}$$

E_{ij}は無限小歪テンソル，E'_{ij}は無限小差歪テンソルを表す。すなわち，

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.3.12}$$

$$E'_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} \tag{3.3.13}$$

である。これを代入すると，

$$T_{ij} = K\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{3.3.14}$$

となる。

(2) ナヴィエの運動方程式

コーシーの運動方程式

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \tag{2.2.14}$$

に線型等方弾性体の構成方程式(3.3.2)を代入すると，

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}\right] + \rho b_i \tag{3.3.15}$$

左辺の慣性項は，変位が小さいとき，その中の移流項を 0 として良く，

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.3.16}$$

と表される。(3.3.12)を代入すると，

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda \Theta \delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right] + \rho b_i \tag{3.3.17}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla(\lambda \Theta) + \left[\mu(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla)\right]\cdot \nabla + \rho \boldsymbol{b} \tag{3.3.18}$$

この運動方程式は**ナヴィエ(Navier)の運動方程式**と呼ばれる。弾性定数が場所によらず一定の時は，

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i$$

$$= (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i \tag{3.3.19}$$

となる。ベクトル形で書くと

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla \Theta + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{b} \tag{3.3.20}$$

である。

3.4 粘性流体

(1) 線型粘性流体の構成方程式は一般に

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + C_{ijkm}D_{km} \tag{3.4.1}$$

と表される。ここで，p は熱力学的な圧力である。C_{ijkm} は粘性係数テンソルである。等方的な粘性流体の場合，等方弾性体と同様，２つの独立成分を持ち，

$$C_{ijkm} = \lambda_F \delta_{ij}\delta_{km} + 2\eta\left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right) \tag{3.4.2}$$

と表される。(3.4.1)に代入すると，構成方程式

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda_F D_{kk}\delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \tag{3.4.3}$$

が得られる。歪速度を体積膨張速度と差歪速度に分けると，

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\lambda_F + \frac{2}{3}\eta\right) D_{kk}\delta_{ij} + 2\eta D'_{ij} \tag{3.4.4}$$

となり，ここで，体積粘性率を

$$k_B = \lambda_F + \frac{2}{3}\eta \tag{3.4.5}$$

と定義すると，

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + k_B D_{kk}\delta_{ij} + 2\eta D'_{ij} \tag{3.4.6}$$

となる。ηは剪断変形のしにくさを表しており，**粘性率**と呼ばれる。対角和をとることにより，

$$-3\overline{p} = -3p + 3k_B D_{kk} \tag{3.4.7}$$

$$-\overline{p} = -p + k_B D_{kk} \tag{3.4.8}$$

ただし，は応力の等方成分であり，

$$D_{kk} = 0 \tag{3.4.9}$$

$$k_B = 0 \tag{3.4.10}$$

のとき

$$\overline{p} = p \tag{3.4.11}$$

となり，熱力学的圧力と一致する。前者は流体が非圧縮であること，後者は体積粘性率が 0 であることを表す。体積粘性率は実際 0 と仮定して差し支えない。つまり，体積変化に対する粘性抵抗は測定できないほど小さい。これを**ストークス(Stokes)の条件**と呼ぶ。このとき，構成方程式は，

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta D'_{ij} \tag{3.4.12}$$

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\right) \tag{3.4.13}$$

(3.1.7)を代入すると，

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{3.4.14}$$

となる。

(2) ナヴィエ・ストークス方程式

コーシーの運動方程式

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \tag{2.2.14}$$

に構成方程式を代入して

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right]+\rho b_i \tag{3.4.15}$$

が得られる。ベクトル形では，

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla p+\left[\eta\left\{(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I}\right\}\right]\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{b} \tag{3.4.16}$$

である。この運動方程式は**ナヴィエ・ストークス(Navier-Stokes)の運動方程式**と呼ばれる。

(3) エネルギー保存の式

ここでは，エネルギー方程式を計算しやすいように，温度で表すことを考える。エンタルピーなどでも表すことも可能である。まず，エネルギー方程式

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+T_{ij}D_{ij}+\rho h^{int} \tag{2.3.27}$$

の右辺第２項，つまり変形に伴う仕事の項について考える。ここでは，粘性流体を考える。構成方程式を応力に代入すると，

$$T_{ij}D_{ij}=-pD_{kk}+k_B D_{kk}^2+2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.17}$$

ここで，第１項は

$$-pD_{kk}=-p\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}=-\rho p\frac{dv}{dt} \tag{3.4.18}$$

のようになり，熱力学的圧力による可逆的な仕事

$$d'w=pdv \tag{2.5.2}$$

である。２項目以降は粘性による運動エネルギーの散逸であり，非可逆的な仕事である。

$$W_D=k_B D_{kk}^2+2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.19}$$

とすると，常に

$$W_D>0 \tag{3.4.20}$$

でなくてはならない。このことから，

$$k_B\ge 0 \tag{3.4.21}$$

$$\eta\ge 0 \tag{3.4.22}$$

という条件が得られる。つまり，粘性係数は正でなくてはならない。

エネルギー方程式に(3.4.19)を代入して，ストークスの条件を考慮すると

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\rho h^{int}-\rho p\frac{dv}{dt}+2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.23}$$

圧力による仕事を左辺に移項すると，

$$\rho\left(\frac{du}{dt}+p\frac{dv}{dt}\right)=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\rho h^{int}+2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.24}$$

となる。左辺の括弧( )内は $d`q/dt$ である。(2.5.3)を用いると，

$$\rho T\frac{ds}{dt}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\rho h^{int}+2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.25}$$

さらに，(2.5.25)を用いると

$$\rho C_p\frac{dT}{dt}+\alpha T\frac{dp}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho h^{int}+\boldsymbol{\Phi} \tag{3.4.26}$$

が得られる。左辺第 2 項は断熱温度変化を表す。右辺第 1 項は熱伝導による熱流入，第 2 項は内部発熱 (マントルでは放射性元素の発熱)，第 3 項は粘性散逸を表す。ここで，温度 T は絶対温度でなければならないことに注意せよ。ただし，熱流量ベクトル q_i と散逸関数 $\boldsymbol{\Phi}$ は

$$q_i=-k\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{3.4.27}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.4.28}$$

である。ベクトル形式では

$$\rho C_p\frac{dT}{dt}+\alpha T\frac{dp}{dt}=\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+\rho h^{int}+\boldsymbol{\Phi} \tag{3.4.29}$$

となる。

3.5 まとめ

(1) 線型等方弾性体の方程式

運動方程式

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda\Theta\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]+\rho b_i \tag{3.5.1}$$

ただし，ラメの第 1 弾性率は体積弾性率を用いて

$$\lambda=K-\frac{2}{3}\mu \tag{3.5.2}$$

である。K は熱力学的状態に応じて K_T あるいは K_S を選ぶ。

(2) 粘性流体の方程式

質量保存の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}\right)=0 \tag{3.5.3}$$

運動量保存の式

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right]+\rho b_i \tag{3.5.4}$$

エネルギー保存の式

$$\rho C_p\frac{dT}{dt}+\alpha T\frac{dp}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho h^{int}+\Phi \tag{3.5.6}$$

$$\Phi=2\eta D'_{ij}D'_{ij} \tag{3.5.7}$$

変数：密度，速度ベクトル，圧力，温度

$(\rho, v_1, v_2, v_3, p, T)$

変数は 6 個で式は 1+3+1=5 個ある。もう 1 つ必要な式は**状態方程式**

$$f(\rho, T, p)=0 \tag{3.5.8}$$

である。

3.6 粘弾性体

(1) Maxwell 粘弾性

Maxwell 粘弾性はバネとダッシュポットを直列に繋いだものとしてモデル化される。つまり，全体の歪は，粘性体の歪と弾性体の歪みを合計したものである。粘性体は歪速度で，弾性体は歪みで記述されるので，全体の歪速度が粘性体と弾性体の歪速度の合計と考える。粘性体の差歪速度は

$$D'_{ij}=\frac{1}{2\eta}T'_{ij} \tag{3.6.1}$$

であり，弾性体の差歪速度は

$$D'_{ij}=\frac{1}{2\mu}\frac{d^{\circ}T'_{ij}}{dt} \tag{3.6.2}$$

である。両者を合計すると，全体の差歪速度テンソル

$$D'_{ij}=\frac{1}{2\eta}T'_{ij}+\frac{1}{2\mu}\frac{d^{\circ}T'_{ij}}{dt} \tag{3.6.3}$$

が得られる。これを

$$2\eta D'_{ij}=T'_{ij}+\tau_M\frac{d^{\circ}T'_{ij}}{dt} \tag{3.6.4}$$

のように変形する。ここで，は**マックスウェルの緩和時間** (Maxwell's relaxation time) であり，

$$\tau_M=\frac{\eta}{\mu} \tag{3.6.5}$$

と表される。ベクトル形では,

$$2\eta \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{T}' + \tau_M \frac{d^\circ \boldsymbol{T}'}{dt} \tag{3.6.8}$$

となる。もう 1 つ必要な式は弾性的な膨張・圧縮の式 (3.3.7) である。この式は運動方程式に直接代入することは出来ない。ここで,d°は物質微分ではなく,**共回転微分**

$$\frac{d^\circ T'_{ij}}{dt} = \frac{\partial T'_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_k} + W_{ik} T'_{kj} - W_{kj} T'_{ik} \tag{3.6.9}$$

$$\frac{d^\circ \boldsymbol{T}'}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{T}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}' \cdot \boldsymbol{W}$$

を表す。粘弾性体では,回転により応力の方向や成分が変わってしまうことを表している。