1．テンソルの復習

1.1 基本的なテンソル

(1) クロネッカー(Kronecker)のデルタ

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j) \tag{1.1.1}$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1.1.2}$$

(2) 交代記号 (レヴィ・ティヴィタの記号，エディントンの記号)

$$\varepsilon_{ijk} = 1\text{，}(i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \tag{1.1.3}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1\text{，}(i,j,k) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \tag{1.1.4}$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0\text{，上記以外の}(i,j,k) \tag{1.1.5}$$

あるいは

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \tag{1.1.6}$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \tag{1.1.7}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{133} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{221} \\ &= \varepsilon_{223} = \varepsilon_{233} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{333} = 0\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

1.2 テンソルの演算

(1) テンソルの内積

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{U} = T_{ij} U_{ij} \tag{1.2.1}$$

$$\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{U} = T_{ij} U_{ji} \tag{1.2.2}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U} \tag{1.2.3}$$

$$P_{ij} = T_{ik} U_{kj} \tag{1.2.4}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{T} \tag{1.2.5}$$

$$Q_{ij} = U_{ik} T_{kj} \tag{1.2.6}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.2.7}$$

$$s_i = T_{ik} v_k \tag{1.2.8}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T} \tag{1.2.9}$$

$$s_i = v_k T_{ki} \tag{1.2.10}$$

(2) スカラー・ベクトルの勾配

スカラー関数 F

$$\nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_k \right) F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.11}$$

ベクトル関数 $\boldsymbol{v}$

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \right) \left(v_k \boldsymbol{e}_k \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k \tag{1.2.12}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{v} \right)_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tag{1.2.13}$$

$$\boldsymbol{v} \nabla = \left(v_i \boldsymbol{e}_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_k \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k \tag{1.2.14}$$

$$\left(\boldsymbol{v} \nabla \right)_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{1.2.15}$$

(3) テンソルの発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \right) \cdot \left(T_{ik} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k \right) = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k \tag{1.2.16}$$

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{T} \right)_k = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \tag{1.2.17}$$

$$\boldsymbol{T} \cdot \nabla = \left(T_{ik} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_k \right) = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i \tag{1.2.18}$$

$$\left(\boldsymbol{T} \cdot \nabla \right)_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.2.19}$$

(4) 対称テンソルと交代テンソル

$$S_{ji} = S_{ij} \tag{1.2.20}$$

$$A_{ji} = -A_{ij} \tag{1.2.21}$$

一般にテンソルは対称テンソルと交代テンソルの和として表現できる

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{1.2.22}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(T_{ij} + T_{ji} \right) \tag{1.2.23}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(T_{ij} - T_{ji} \right) \tag{1.2.24}$$

(5) ベクトルの外積

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{1.2.25}$$

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{1.2.26}$$

(6) 軸ベクトルと交代テンソル

$$W_{jk}=\varepsilon_{ijk}\omega_i \tag{1.2.27}$$

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.28}$$

ωを回転速度ベクトルとすると W はスピンテンソル

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{W} \tag{1.2.29}$$

$$v_i=\varepsilon_{ijk}\omega_j r_k=-W_{ij}r_j \tag{1.2.30}$$

1.3 積分の変換

(1) ベクトル関数のガウスの定理

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,dS=\iiint_v \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,dV \tag{1.3.1}$$

$$\oiint_S v_i n_i\,dS=\iiint_v \frac{\partial v_i}{\partial x_i}dV \tag{1.3.2}$$

(2) スカラー関数のガウスの定理

$$\oiint_S F\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_v \nabla F\,dV \tag{1.3.3}$$

$$\oiint_S Fn_i\,dS=\iiint_v \frac{\partial F}{\partial x_i}dV \tag{1.3.4}$$

(3) テンソル関数のガウスの定理

$$\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\,dS=\iiint_v \nabla\cdot\boldsymbol{T}\,dV \tag{1.3.5}$$

$$\oiint_S n_i T_{ik}\,dS=\iiint_v \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}dV \tag{1.3.6}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_v \boldsymbol{T}\cdot\nabla\,dV \tag{1.3.7}$$

$$\oiint_S T_{ik}n_k\,dS=\iiint_v \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}dV \tag{1.3.8}$$

(4) ベクトル関数のストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{1.3.9}$$

$$\oint_C v_i t_i\,ds=\iint_S \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}n_i\,dS \tag{1.3.10}$$

1.4 テンソルの変換

(1) 1階テンソル (ベクトル)

$$v'_j = A_{ij} v_j$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$$

(2) 2階テンソル

$$T'_{ij} = A_{ik} A_{jm} T_{km}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A}^T$$

このような変換をするものをテンソルと定義することもできる。

1.5 テンソル不変量

(1) 第1不変量

$$T_I = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{1.4.1}$$

すなわち対角和である。

(2) 第2不変量

$$T_{II} = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4.2}$$

$$T_{II} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}^2 T - \mathrm{tr} T^2\right)$$

(3) 第3不変量

$$T_{III} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.3}$$

すなわち，行列式である。

(4) モーメント

これらもテンソルから作られる不変量である。

$$\bar{I}_k = \mathrm{tr} T^k \tag{1.4.4}$$

$$T_I = \bar{I}_1 \tag{1.4.5}$$

$$T_{II} = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2\right) \tag{1.4.6}$$

$$T_{II}=\frac{1}{6}\bar{I}_1^2-\frac{1}{2}\bar{I}_1\bar{I}_2-\frac{1}{3}\bar{I}_2 \qquad (1.4.7)$$

(5) テンソル不変量の応用

$\bar{I}_2$ を計算すると

$$\bar{I}_2=T_{11}^2+T_{12}^2+T_{13}^2+T_{22}^2+T_{22}^2+T_{23}^2+T_{31}^2+T_{32}^2+T_{33}^2 \qquad (1.4.8)$$

$$\bar{I}_2=T_{ij}T_{ij} \qquad (1.4.9)$$

となる。この値を半分にしたものを転移クリープなど，応力 (歪速度) 依存性がある粘性率を計算するときにしばしば用いる。つまり，

$$T_{II}'=\sqrt{\frac{1}{2}T_{ij}T_{ij}} \qquad (1.4.10)$$

である。この値は粘性流体において最大主応力に一致する。

1.5 固有値・固有ベクトル

(1) 固有値・固有ベクトル

正方行列 A に対して

$$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \qquad (1.5.1)$$

と表せるスカラーλとベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する。λを固有値，$\boldsymbol{v}$ を固有ベクトルと呼ぶ。

上式を変形すると，

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{v}=0 \qquad (1.5.2)$$

が零ベクトル以外の解を持つためには，

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (1.5.3)$$

でなければならない。この式を固有方程式と呼ぶ。

(2) 対称行列の対角化

対称行列は固有ベクトルから作られる行列 V を用いて対角化することができる。

$$V=\left(\boldsymbol{v}^1,\ldots,\boldsymbol{v}^n\right)=\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^1 & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} \qquad (1.5.4)$$

$$V=\left(\boldsymbol{v}^1,\ldots,\boldsymbol{v}^n\right)=\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} \qquad (1.5.5)$$

とする。固有ベクトルの直交性により，Vが直交行列であることに注意せよ。つまり，

$$V^{-1} = V^T \tag{1.5.6}$$

が成り立つ。(1.5.1)より，

$$AV = \Lambda V = V\Lambda \tag{1.5.7}$$

前から V の転置行列を掛けると，

$$V^T AV = V^T V\Lambda = V^{-1} V\Lambda = \Lambda \tag{1.5.8}$$

となり，固有値から作られる対角行列となる。

主応力は応力テンソルの固有値である。このとき、直交行列は主応力軸の方向へ座標を回転させる変換行列となっている。

1.6 極分解

(1) ２階テンソル (行列) の極分解

２階テンソル $\boldsymbol{T}$ が正則であるとき，テンソルは対称テンソル $\boldsymbol{P}$ または $\boldsymbol{Q}$ と直交テンソル $\boldsymbol{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R} \tag{1.6.1}$$

と分解できる。連続体力学では歪を定義するときなどに用いられる。

(2) 極分解の証明

A^TA が正値対称行列であることを示す。

$$\left(A^T A\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^T A \tag{1.6.2}$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\left(A^T A\right)\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\left(A^T A\boldsymbol{x}\right) = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} \geq 0 \tag{1.6.3}$$

A^TA は正定値であるので，このとき A^TA=P^2 となる P が存在する。正値対称行列の固有値はすべて正となることから，の固有値を$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$とすると，

$$A^T A = V\Lambda V^T \tag{1.6.4}$$

である。P は

$$P = V\left(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)IV^T \tag{1.6.5}$$

となる。転置行列を作ると

$$P^T = \left[V\left(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)IV^T\right]^T = V\left(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)IV^T = P \tag{1.6.6}$$

元の行列に等しい。このとき，

$$P^2 = V\left(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)IV^T V\left(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)IV^T = V\left(\lambda_1\ldots\lambda_n\right)IV^T = A^T A \tag{1.6.8}$$

となる。ここで,

$$R = AP^{-1} \tag{1.6.9}$$

と置くと,

$$R^T R = \left(AP^{-1}\right)^T AP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^T A^T AP^{-1} = \left(P^T\right)^{-1} P^2 P^{-1} = \left(P^T\right)^{-1} P^T = I \tag{1.6.10}$$

となって，R が直交行列であることが示された。つまり,

$A = RP$

R: 直交行列

P: 対称行列

と分解することができる。