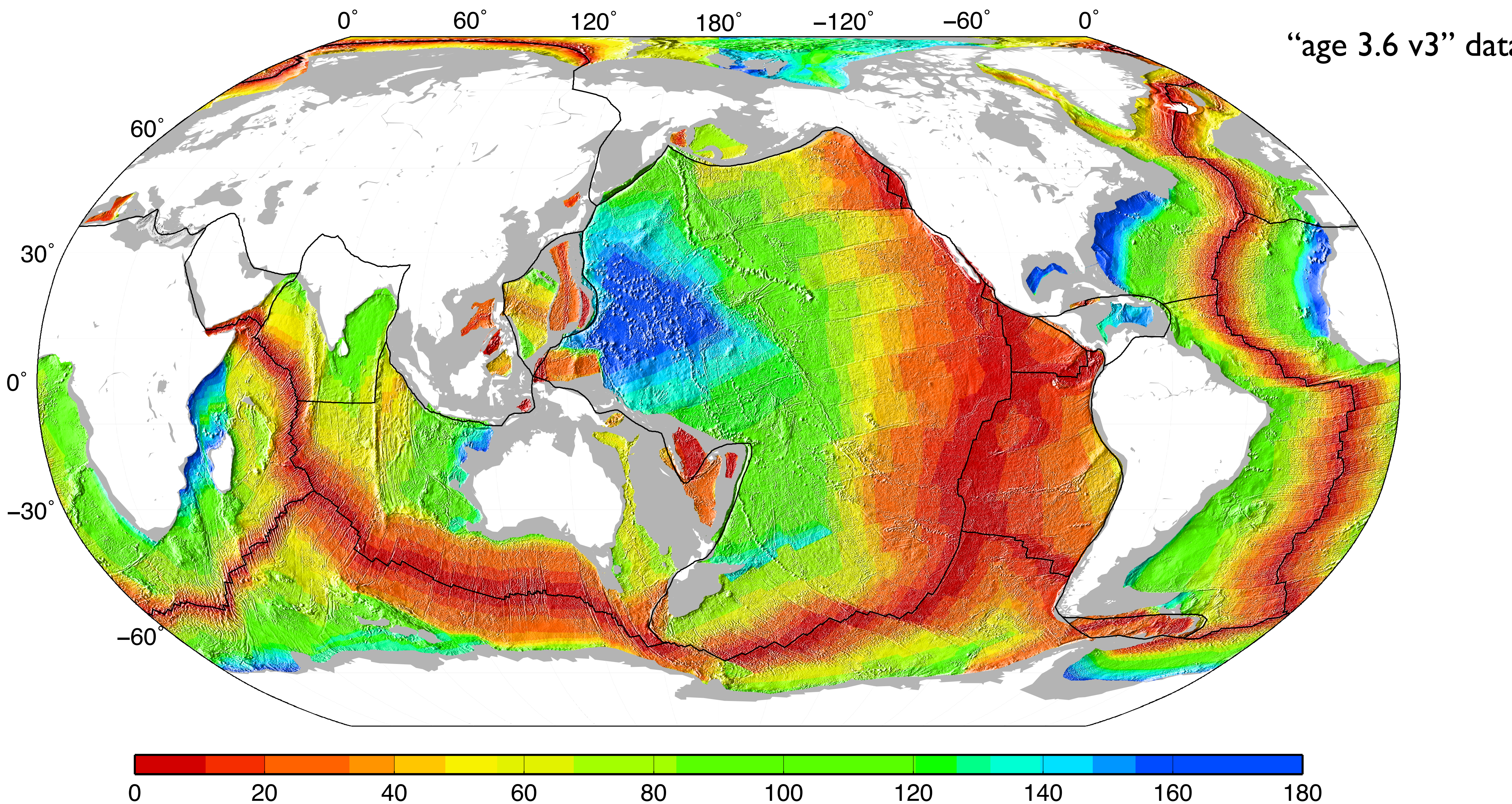
熱伝導と行列解法

中久喜伴益

広島大学大学院理学研究科
地球惑星システム学専攻

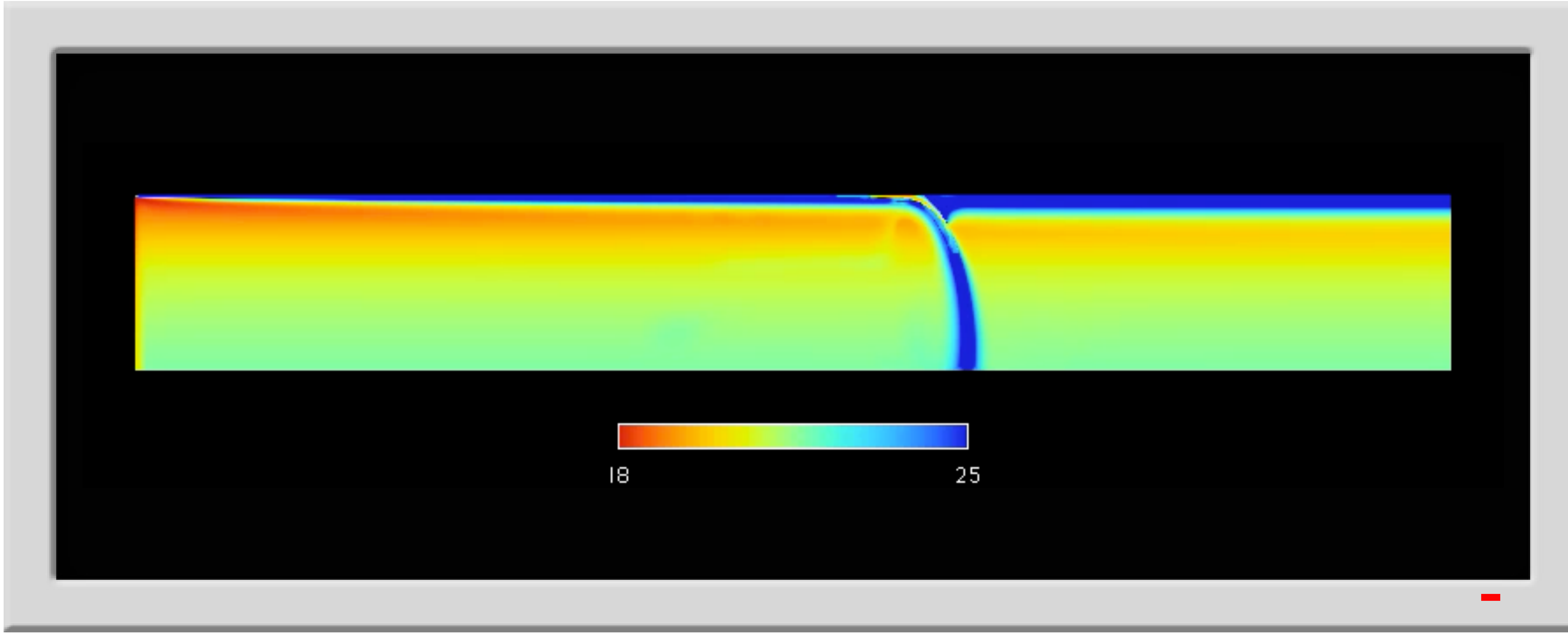
地球表面を覆うプレート



10数枚の大きなプレートに覆われている

プレートの相対運動が地学現象(地震・火山等)を起こす

プレート運動とプレート内の熱輸送



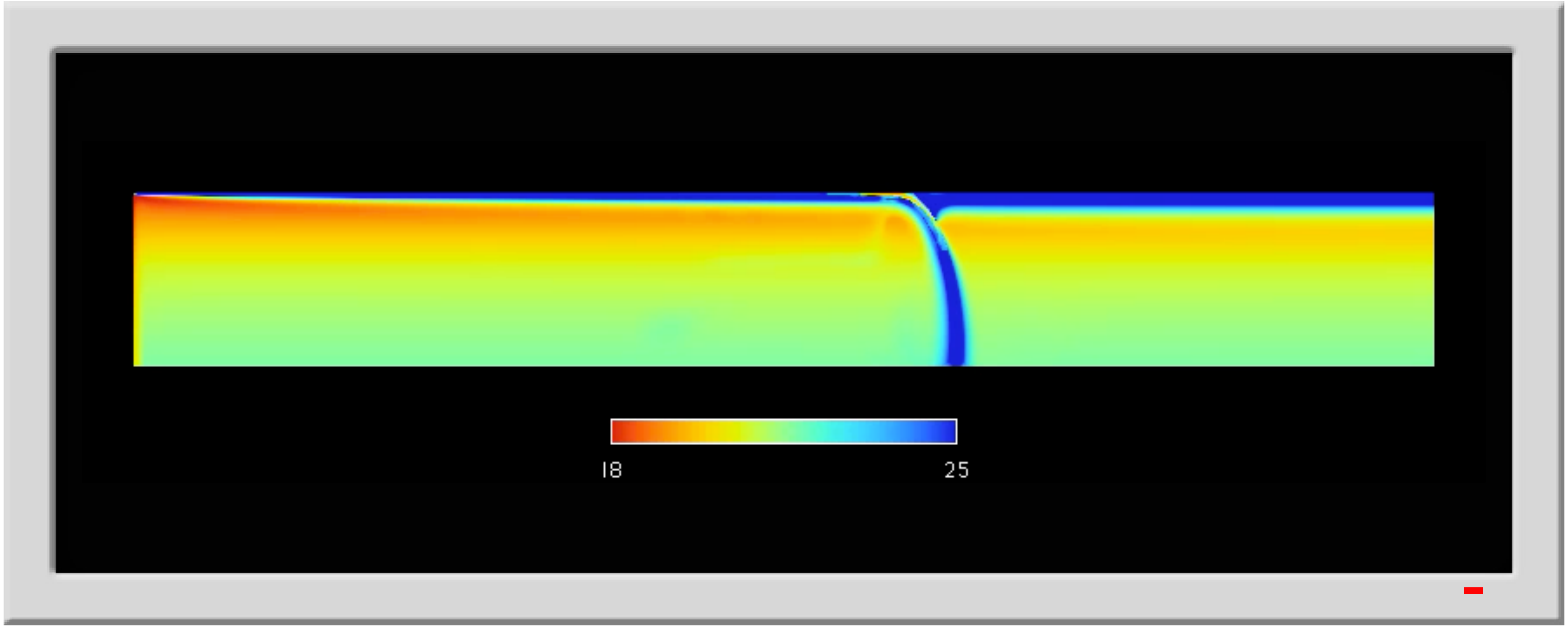
止まっている視点: ２次元移流・拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

プレートと伴に移動する視点: １次元拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

プレート運動とプレート内の熱輸送



止まっている視点: ２次元移流・拡散方程式

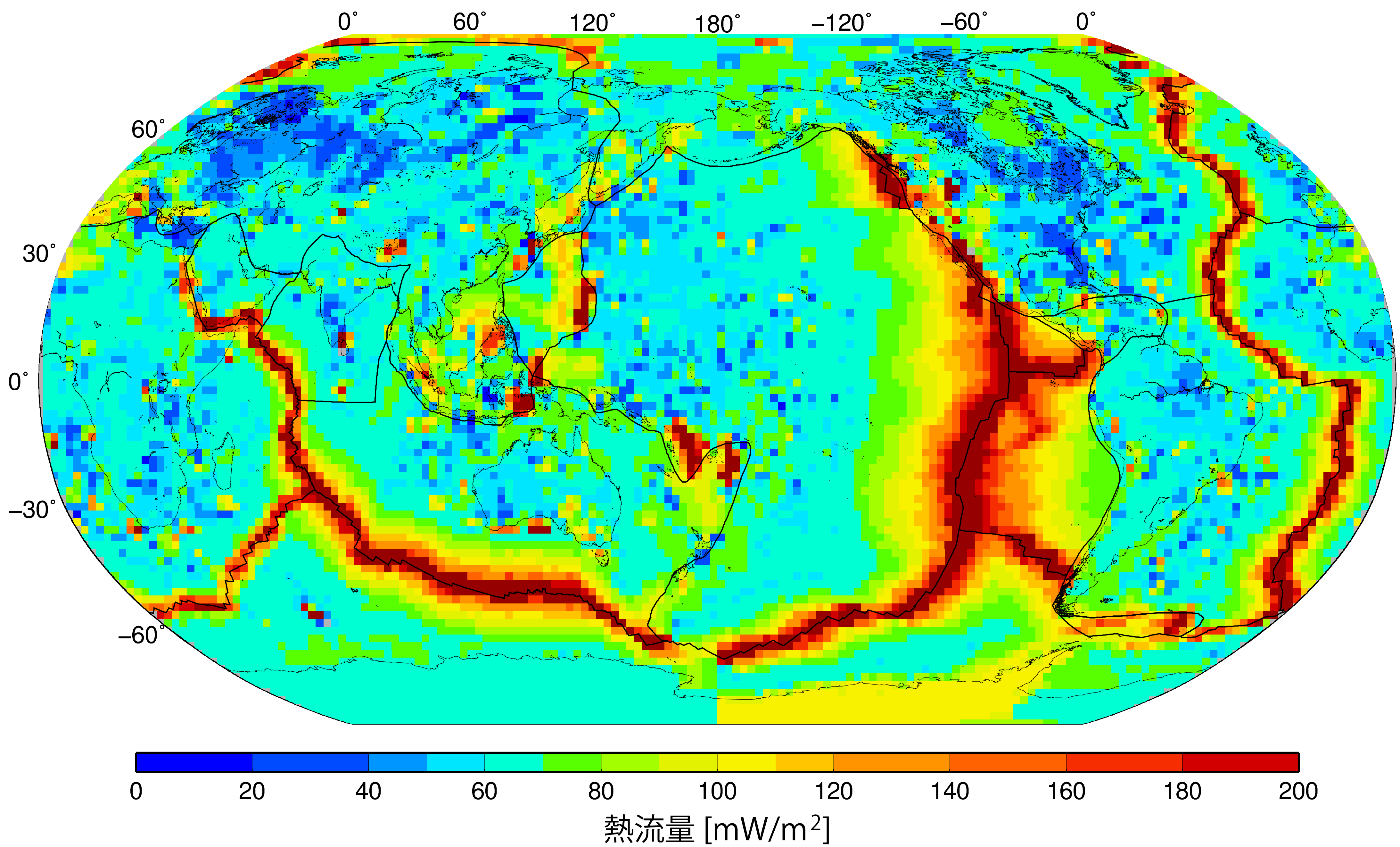
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

プレートと伴に移動する視点: １次元拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

プレートに関する観測–地殻熱流量

Data compiled by Davies (2013)



新しい海底ほど地殻熱流量が大きい

物理で出てくる方程式

生成・消滅

$$\frac{d\phi}{dt} = a\phi$$

ポテンシャル方程式 (楕円型)

$$\nabla^2 \phi = \rho$$

拡散方程式 (放物型)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \phi$$

移流拡散方程式 (放物型)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi = \kappa \nabla^2 \phi$$

移流方程式 (双曲型)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

離散化の方法

有限差分法 (FInite difference method-FDM)

テイラー展開により微分を差分商で置き換える

有限体積法 (Finite volume method-FVM)

領域を小さな体積に分け、体積毎に保存式を作る

有限要素法 (Finite element method-FEM)

領域を要素に分け、要素内の量を低次多項式で近似する

スペクトル法 (Spectrum method)

領域全体を有限個のスペクトルの和で表す

粒子法 (Particle method)

連続体を粒子の集合として近似する

有限差分法

Finite Difference Method

テイラー展開により微分を差分商で置き換える

前進差分

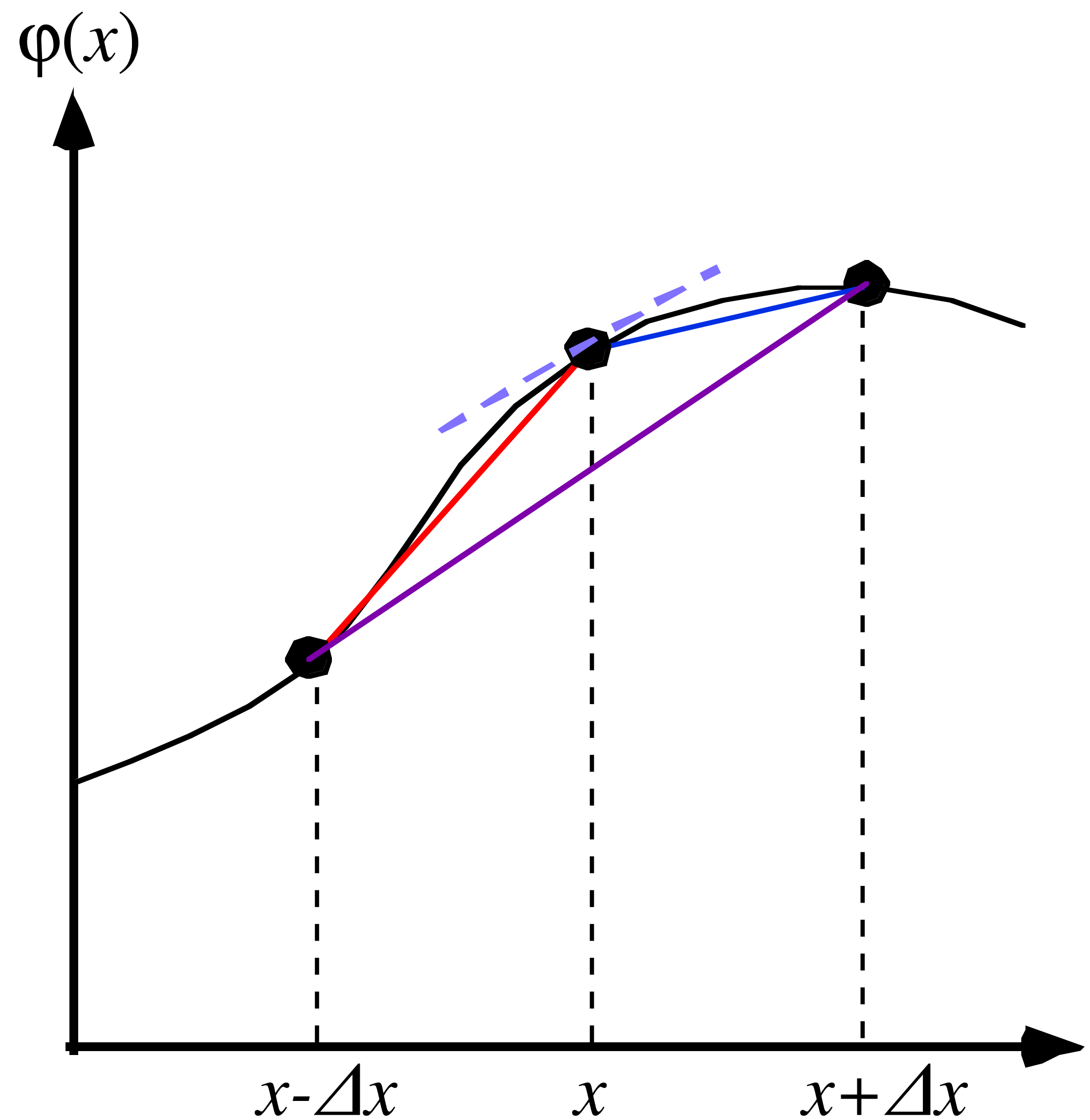
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x,t)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

後退差分

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi(x,t)-\phi(x-\Delta x,t)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

中心差分

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x-\Delta x,t)}{\Delta x}+O\left((\Delta x)^2\right)$$



有限体積法

Finite Volume Method, Control Volume Method

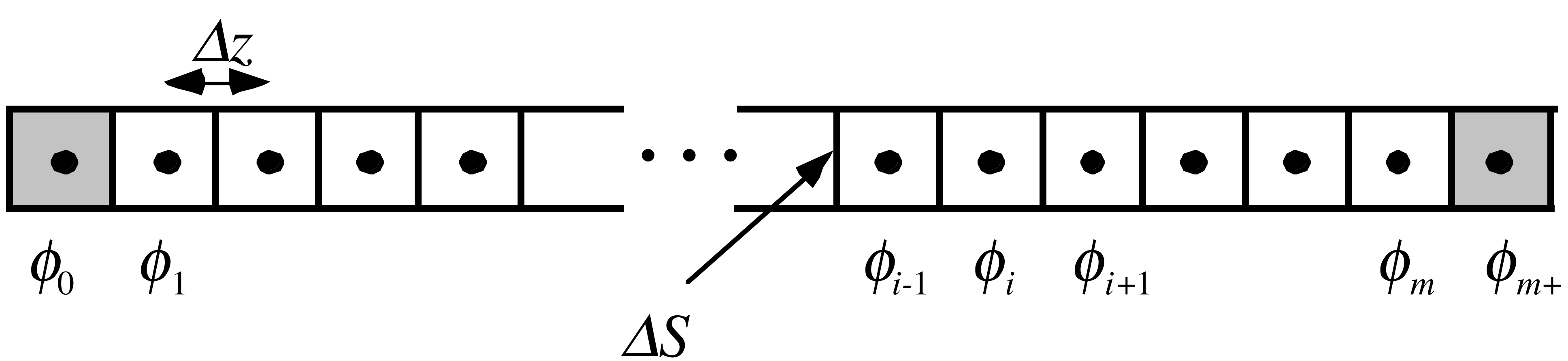
有限体積に対して保存式を作る

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \phi dv = -\int_S (-\kappa \nabla \phi)\mathbf{n} dS$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta V\right)_i = \left\{\left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right\}\Delta S$$

傾きは差分で近似する

$$\left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \kappa_{i+\frac{1}{2}} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$



陽解法と陰解法

陽解法(explicit method)

時間微分以外の項に未来(*n*+1 time step)の値を含まない

数値安定性の条件が必要

陰解法 (implicit method)

時間微分以外の項にも未来(*n*+1 time step)の値を含む

生成・消滅方程式

$$\frac{d\phi}{dt} = -\alpha\phi$$

オイラー法

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n}}{\Delta t} = -\alpha\phi^{n}$$

後退オイラー法

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n}}{\Delta t} = -\alpha\phi^{n+1}$$

クランク・ニコルソン法

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n}}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{2}\left(\phi^{n+1} + \phi^{n}\right)$$

$\Delta t \le \dfrac{1}{\alpha}$ **数値安定性の条件**

熱伝導方程式の差分方程式

熱伝導の方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

オイラー法による差分方程式

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \Delta t \kappa \frac{T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n}}{\Delta x^2}$$

数値安定性の条件

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2\kappa}$$

初期条件と境界条件

熱伝導の方程式：時間１階微分と空間２階微分を持つ

時間の境界条件：１つ、空間の境界条件：２つ

初期条件

空間全部のT_i^0に対して温度を与える→T_i^1が計算できる

境界条件

時間全部の２つの境界に温度

時間全部の１つの境界に温度、もう１つの境界に温度勾配

時間全部の１つの境界に温度と温度勾配

境界条件

ディィリクレ型境界条件

温度そのものを与える

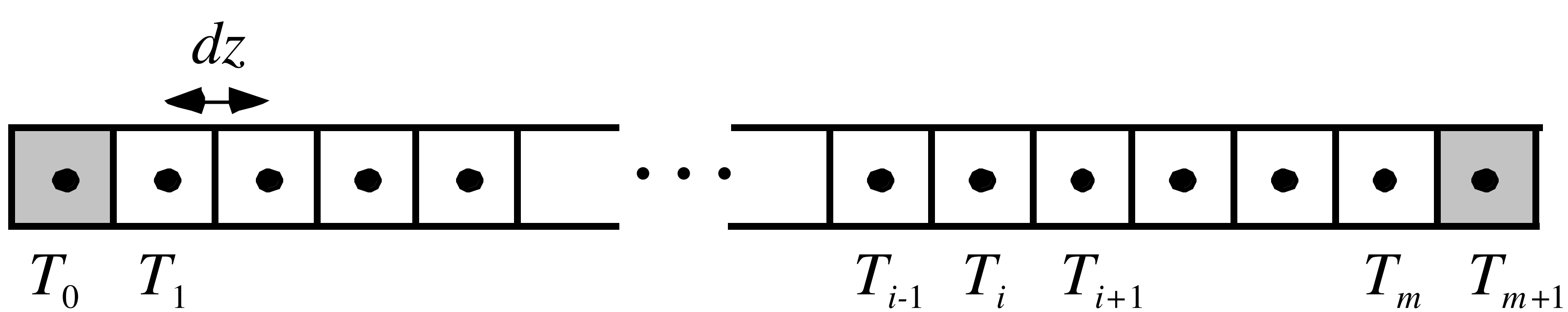
全ての時間に対し

$$T_0^n = T_s$$

ノイマン型境界条件条件

温度勾配(熱流量)を与える

$$k\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta z} = q \qquad \text{より} \qquad T_{m+1} = T_m + \frac{q\Delta z}{k}$$



熱伝導問題のアルゴリズム

パラメータ設定

it=0

初期値設定

必要な時間まで繰り返し　$it = it+1$

境界条件を設定

mod(it, N_{out})=0の時Tをファイルに出力

$t > t_{max}$となったらループ脱出

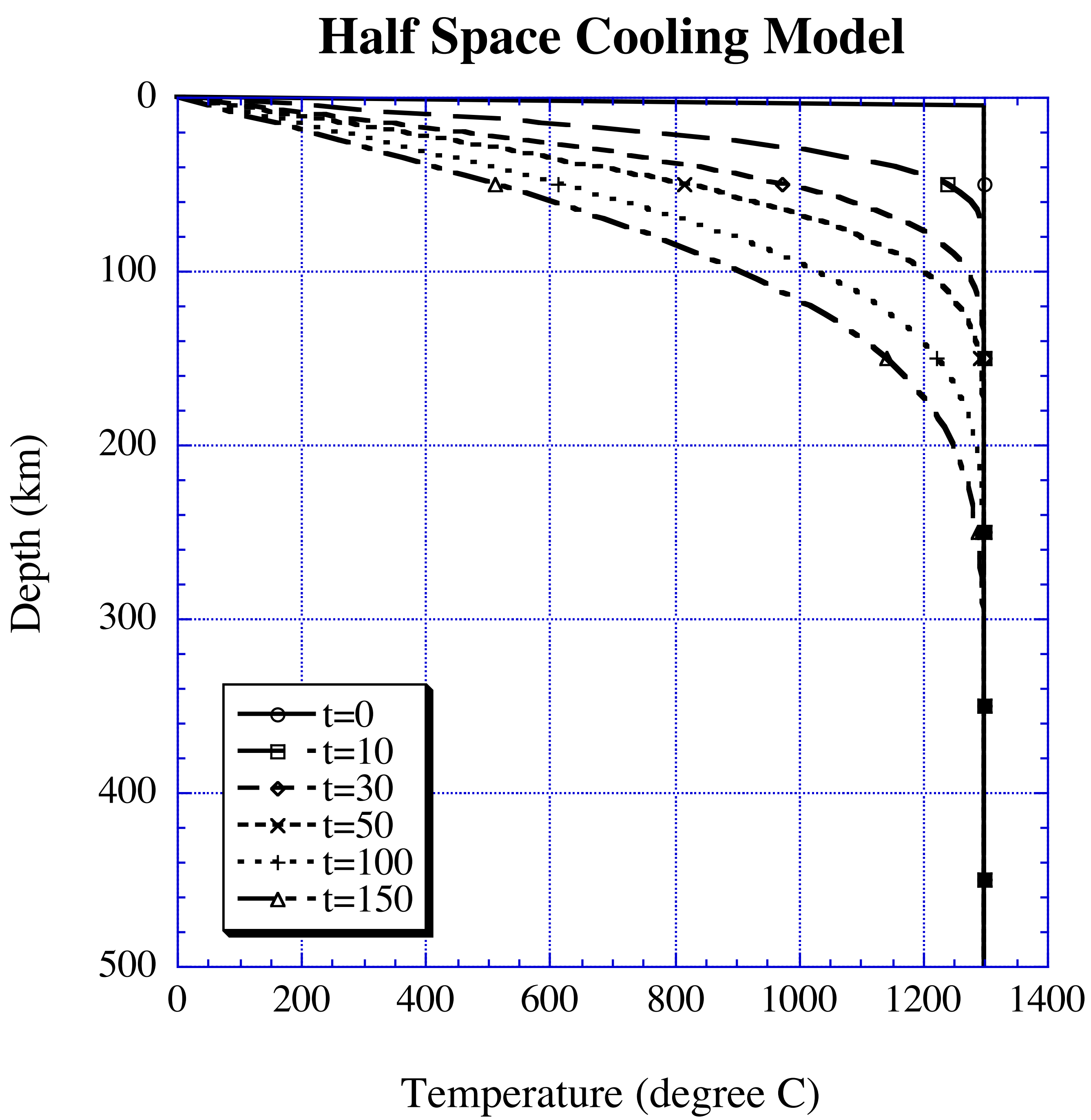
i=1からm-1まで繰り返し

(オイラー法によって)T_i^{n+1}を$T_{i-1}{}^n$, T_i^n , $T_{i+1}{}^n$ から計算

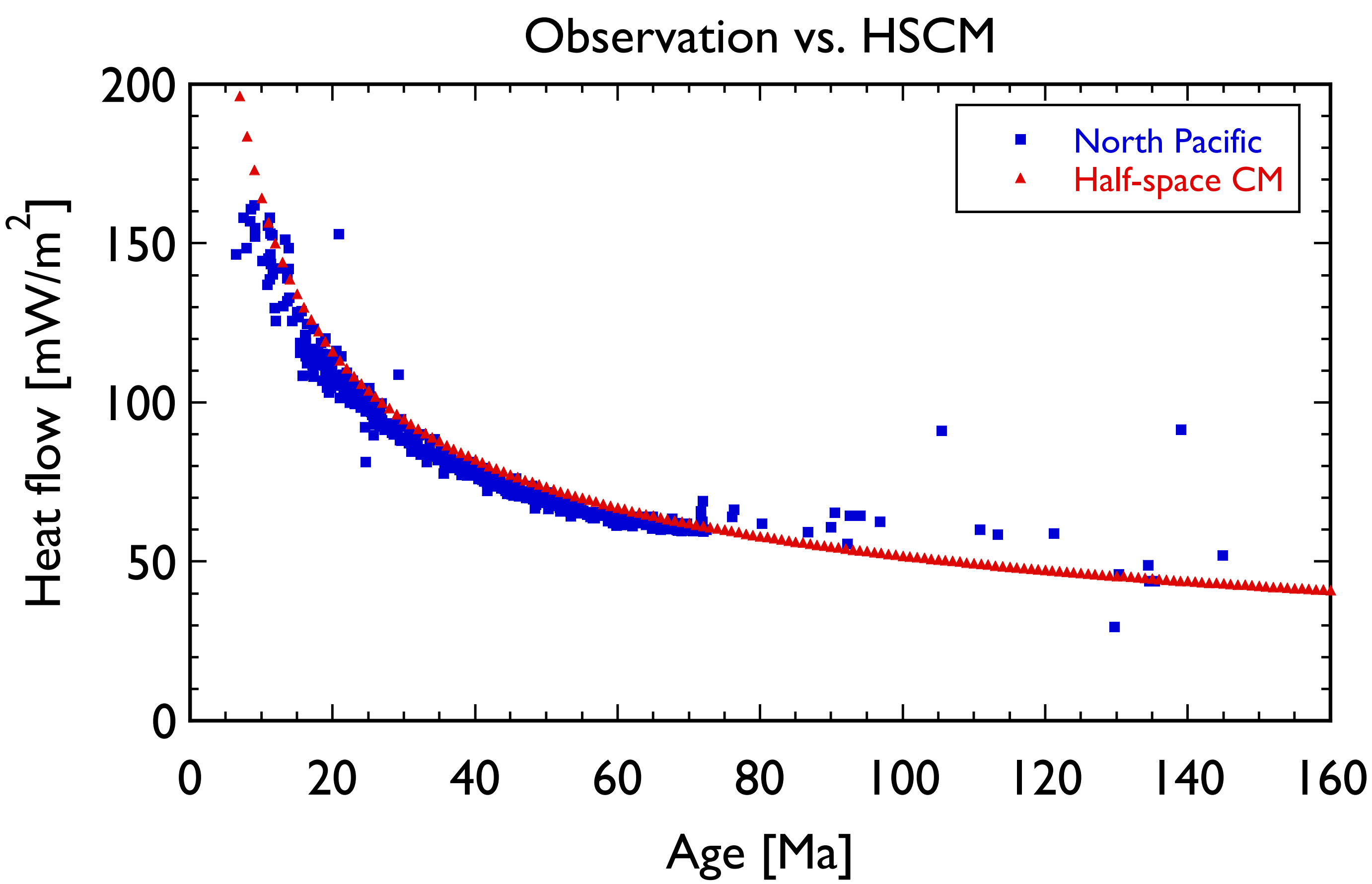
T_i^nに T_i^{n+1}を代入

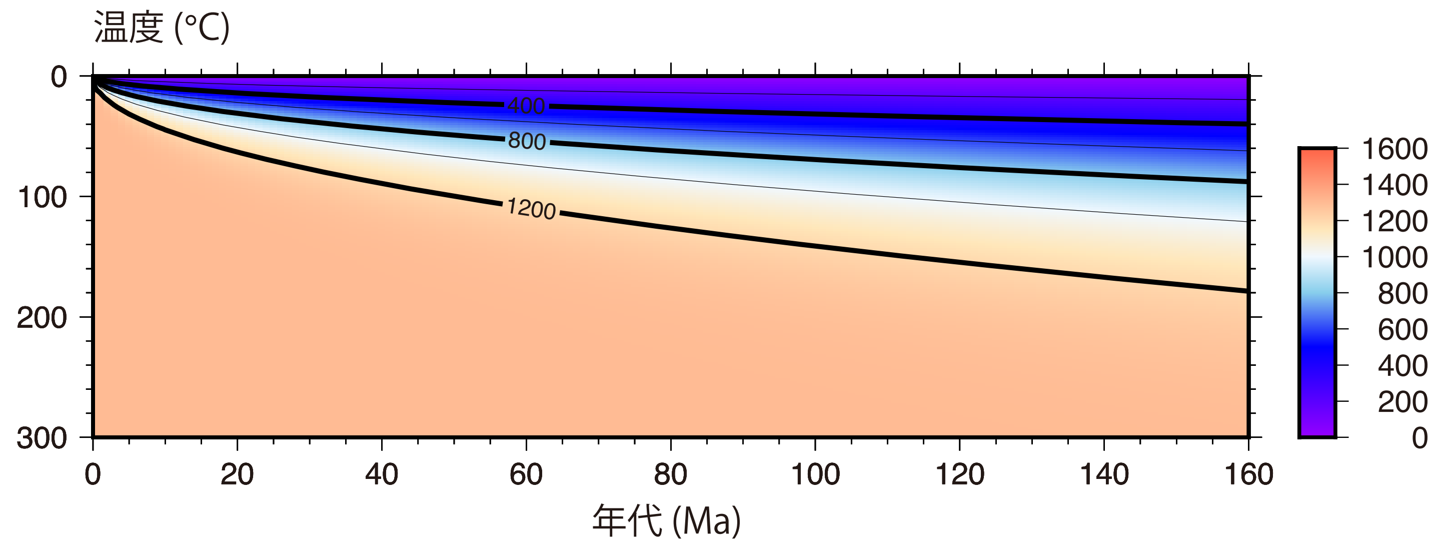
戻る

半無限体冷却モデルによる温度予測値



半無限体冷却モデルによる熱流量の予測と観測





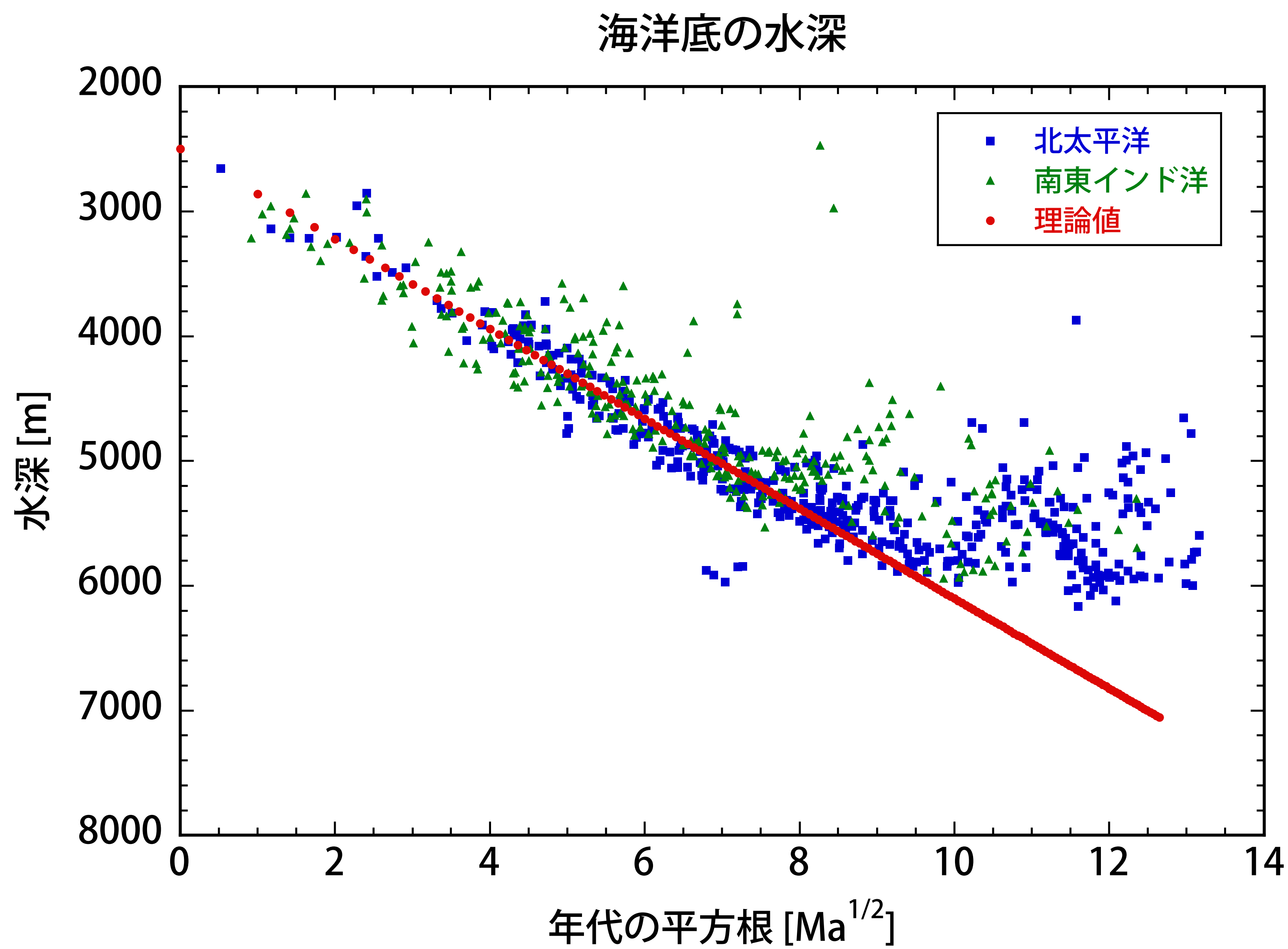
Heat flow data by Davies (2013)

データのばらつき(RMS)の小さいところを選択

熱流量の観測値は半無限体冷却モデルでよく説明できる

水深の観測値と理論値

Data by ETOPO1 and age3.6v3



新しい海底：理論値に従う、古い海底：理論値より高い

熱伝導率の温度依存性、対流の影響

連立一次方程式の求解

直接法 (Direct method)

決まった回数で解に到達する

計算量、メモリ使用量が多いが、安定性がよい

ガウスの消去法

反復法 (Iterative method)

繰り返し計算により初期値を解に近似させる

計算量、メモリ使用量が少なくてすむが、必ずしも収束しない

線型反復(緩和)法系

ヤコビ法、ガウス・ザイデル法、逐次過緩和(SOR)法

共役勾配法系

共役勾配法、ICCG法、共役残差法

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$\left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$\left(a_{21} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$\left(a_{31} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$(a_{11} \sim a_{13}, b_1) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$(a_{21} \sim a_{23}, b_2) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$(a_{31} \sim a_{33}, b_3) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{22} \sim a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$(a_{11} \sim a_{13}, b_1) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$(a_{21} \sim a_{23}, b_2) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$(a_{31} \sim a_{33}, b_3) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{22} \sim a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$(a_{11} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$(a_{21} \sim a_{23}, b_2) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$(a_{31} \sim a_{33}, b_3) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2)/a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{22} \sim a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$(a_{11} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$(a_{21} \sim a_{23}, b_2) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$(a_{31} \sim a_{33}, b_3) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2)/a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{22} \sim a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$\left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$\left(a_{21} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$\left(a_{31} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$(a_{11} \sim a_{13}, b_1) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$(a_{21} \sim a_{23}, b_2) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$(a_{31} \sim a_{33}, b_3) - (a_{11} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{22} \sim a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	$\left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
1	1	−1	2	
0	2	−4	−6	$\left(a_{21} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
0	−5	3	1	$\left(a_{31} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{11} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
0	−5	3	1	
1	1	−1	2	
0	1	−2	−3	
0	0	−7	−14	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法

前進消去

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -14 \end{bmatrix}$$

後退代入

$$x_3 = -14 / \left(-7\right) = 2 \qquad x_3 = b_3 / a_{33}$$

$$x_3 = -3 - (-2) \times 2 = 1 \qquad x_2 = b_2 - a_{23} x_3$$

$$x_1 = 2 - \left\{1 \times 1 + \left(-1\right) \times 2\right\} = 3 \qquad x_1 = b_1 - \left(a_{12} x_2 + a_{13} x_3\right)$$

x_nからx_1へ逆順に求める

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	-2	4	
3	5	-7	0	
2	-3	1	5	
2	1	-1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	-7	0	
2	-3	1	5	
2	1	-1	2	
3	2	-4	-6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	-5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	-1	2	
3	2	-2	-3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	-5	3	1	
2	1	-1	2	
3	2	-2	-3	
2	-5	-7	-14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$(a_{12} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23}, b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33}, b_3) - (a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$(a_{12} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2)-(a_{12} \sim a_{13}, b_1)\times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3)-(a_{12} \sim a_{13}, b_1)\times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23}, b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33}, b_3)-(a_{23}, b_2)\times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix}2&2&-2\\3&5&-7\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\5\end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$(a_{12}\sim a_{13},b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22}\sim a_{23},b_2)-(a_{12}\sim a_{13},b_1)\times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32}\sim a_{33},b_3)-(a_{12}\sim a_{13},b_1)\times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23},b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33},b_3)-(a_{23},b_2)\times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$(a_{12} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2)-(a_{12} \sim a_{13}, b_1)\times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3)-(a_{12} \sim a_{13}, b_1)\times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23}, b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33}, b_3)-(a_{23}, b_2)\times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right)/a_{11} \\ 3 & 5 & -7 & 0 & \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -4 & -6 & \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right)-\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right)\times a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & \left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right)-\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right)\times a_{31} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & \left(a_{23}, b_2\right)/a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & \\ 2 & -5 & -7 & -14 & \left(a_{33}, b_3\right)-\left(a_{23}, b_2\right)\times a_{32} \end{array}$$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21} \\ \left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -7 & -14 \end{array}\right] \quad \left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$(a_{12} \sim a_{13}, b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22} \sim a_{23}, b_2) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23}, b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33}, b_3) - (a_{23}, b_2) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & (a_{12} \sim a_{13}, b_1) / a_{11} \\ 3 & 5 & -7 & 0 & \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -4 & -6 & (a_{22} \sim a_{23}, b_2) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & (a_{32} \sim a_{33}, b_3) - (a_{12} \sim a_{13}, b_1) \times a_{31} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & (a_{23}, b_2) / a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & \\ 2 & -5 & -7 & -14 & (a_{33}, b_3) - (a_{23}, b_2) \times a_{32} \end{array}$$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right)-\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right)\times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right)-\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right)\times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right)-\left(a_{23}, b_2\right)\times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	

2	1	−1	2	$(a_{12}\sim a_{13},b_1)/a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	

2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$(a_{22}\sim a_{23},b_2)-(a_{12}\sim a_{13},b_1)\times a_{21}$
2	−5	3	1	$(a_{32}\sim a_{33},b_3)-(a_{12}\sim a_{13},b_1)\times a_{31}$

2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$(a_{23},b_2)/a_{21}$
2	−5	3	1	

2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$(a_{33},b_3)-(a_{23},b_2)\times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 2 & -2 & 4 & \\ 3 & 5 & -7 & 0 & \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11} \\ 3 & 5 & -7 & 0 & \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -4 & -6 & \left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & \left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & \left(a_{23}, b_2\right) / a_{21} \\ 2 & -5 & 3 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 2 & 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & -2 & -3 & \\ 2 & -5 & -7 & -14 & \left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32} \end{array}$$

ガウスの消去法：プログラム用

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

前進消去

2	2	−2	4	
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	$\left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) / a_{11}$
3	5	−7	0	
2	−3	1	5	
2	1	−1	2	
3	2	−4	−6	$\left(a_{22} \sim a_{23}, b_2\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{21}$
2	−5	3	1	$\left(a_{32} \sim a_{33}, b_3\right) - \left(a_{12} \sim a_{13}, b_1\right) \times a_{31}$
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	$\left(a_{23}, b_2\right) / a_{21}$
2	−5	3	1	
2	1	−1	2	
3	2	−2	−3	
2	−5	−7	−14	$\left(a_{33}, b_3\right) - \left(a_{23}, b_2\right) \times a_{32}$

ガウスの消去法：プログラム用

前進消去

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -14 \end{bmatrix}$$

下三角成分は0, a_{nn}以外の対角成分は1: 計算を省略

後退代入

$$x_3 = -14/(-7) = 2 \qquad x_3 = b_3 / a_{33}$$

$$x_3 = -3-(-2)\times 2 = 1 \qquad x_2 = b_2 - a_{23}x_3$$

$$x_1 = 2-\{1\times 1+(-1)\times 2\} = 3 \qquad x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$$

a_{nn}以外の対角成分は本来1であることに注意

熱伝導方程式の係数行列

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
a_{P1} & a_{E1} & 0 & \cdots & & a_{N1} & & & & & & & & & & & & & & \\
a_{W2} & a_{P2} & a_{E1} & 0 & \cdots & & a_{N2} & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & a_{Wm} & a_{Pm} & 0 & 0 & \cdots & \cdot & a_{Nm} & & & & & & & & & & \\
a_{Sm+1} & \cdot & \cdots & 0 & 0 & a_{Pm+1} & a_{Em+1} & 0 & \cdots & \cdot & a_{Nm} & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & a_{S2m+1} & \cdot & \cdots & 0 & 0 & a_{P2m+1} & a_{Em+1} & 0 & \cdots & & a_{Nm} & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & a_{Sk} & \cdot & \cdots & 0 & a_{Wk} & a_{Pk} & a_{Ek} & 0 & \cdots & \cdot & a_{Nk} & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \\
 & & & & & & & & & a_{Sn-m} & 0 & \cdots & 0 & a_{Wn-m} & a_{Pn-m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{Nn-m} \\
 & & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & a_{En-1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & a_{Sn} & \cdot & \cdots & 0 & a_{Wn} & a_{Pn}
\end{array}\right]
$$

境界値の係数は０になる

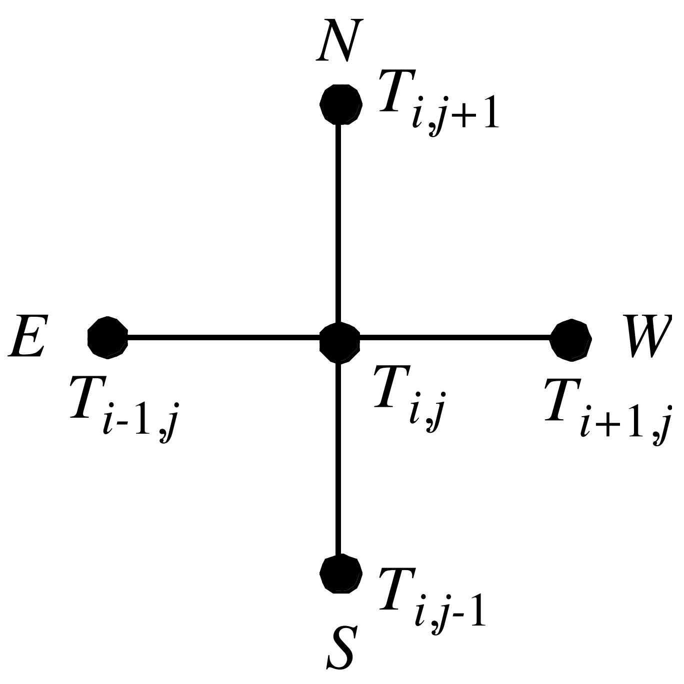
ガウス・ザイデル法とSOR法

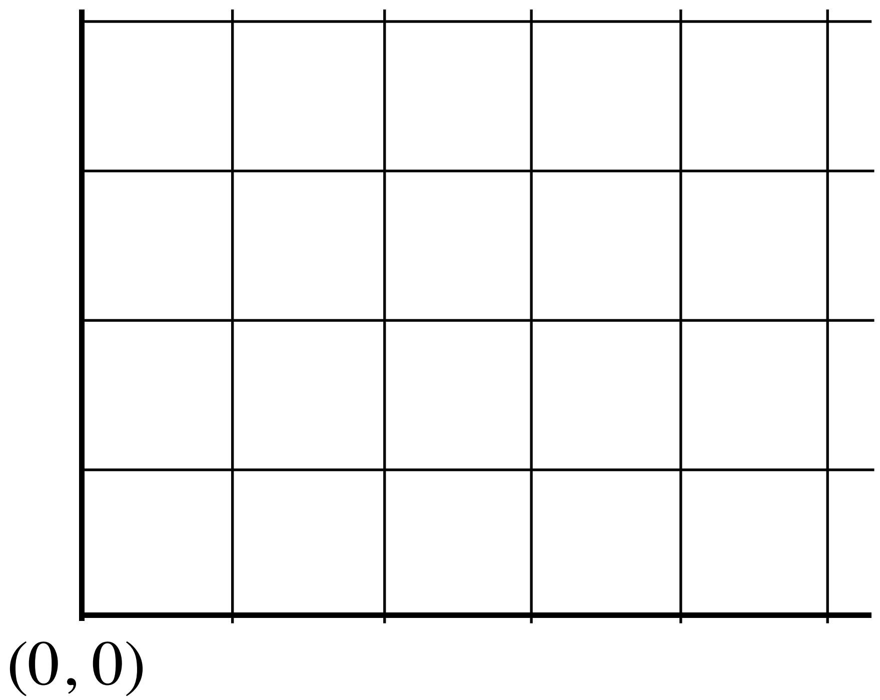
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$





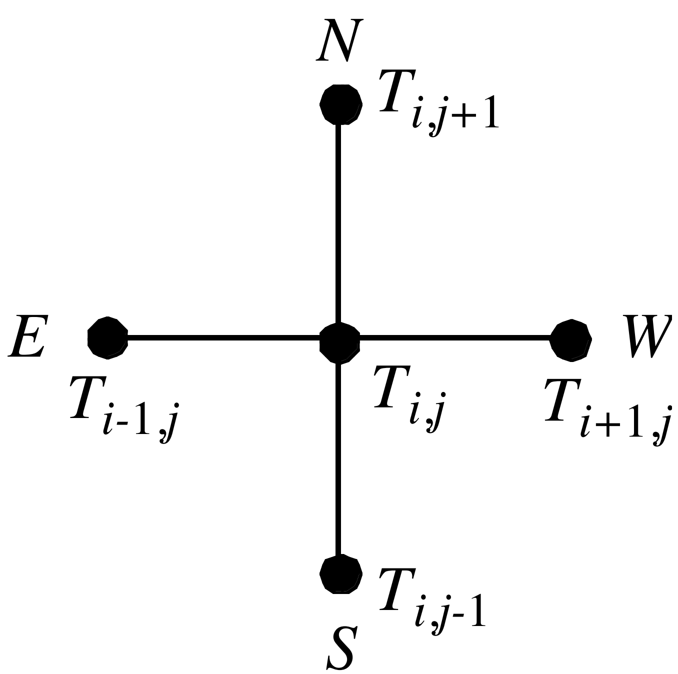
ガウス・ザイデル法とSOR法

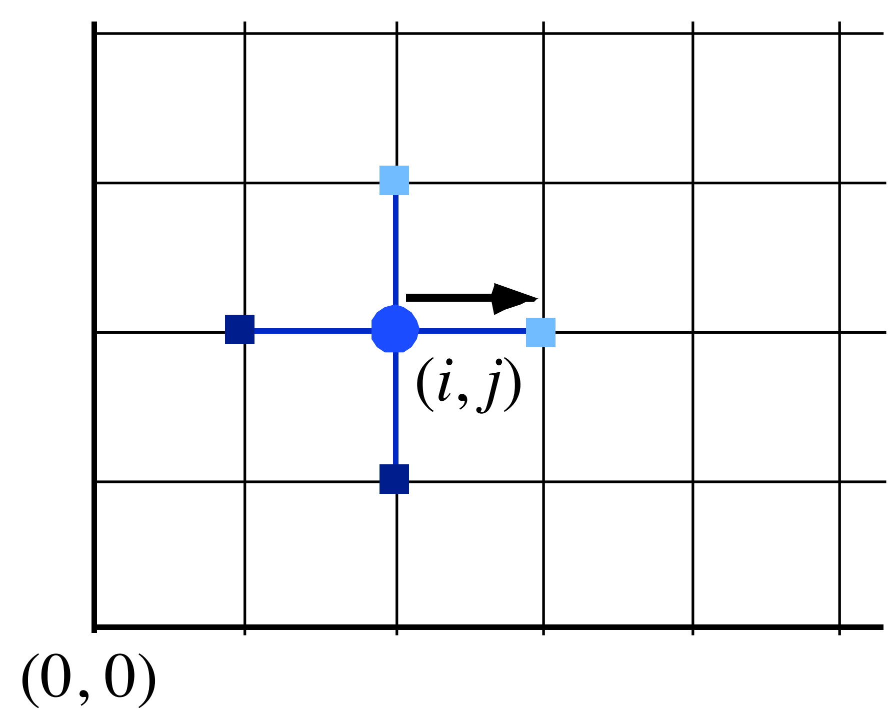
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$





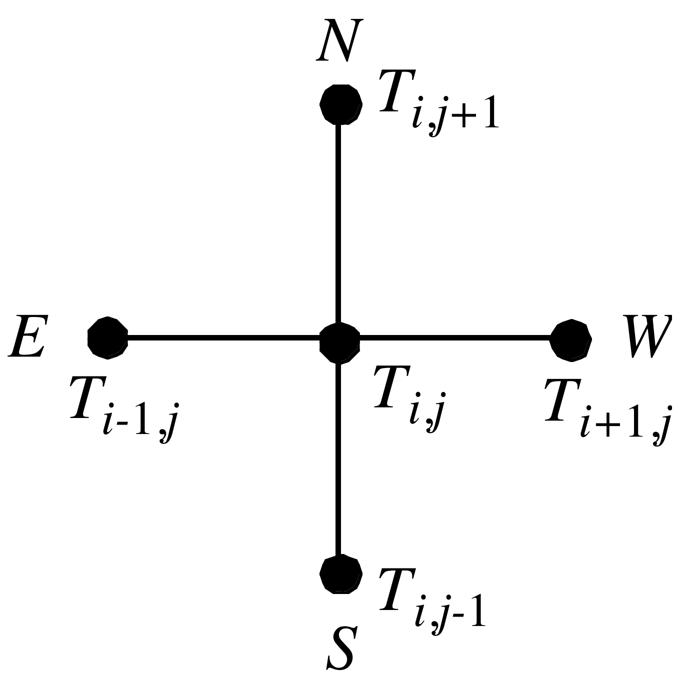
ガウス・ザイデル法とSOR法

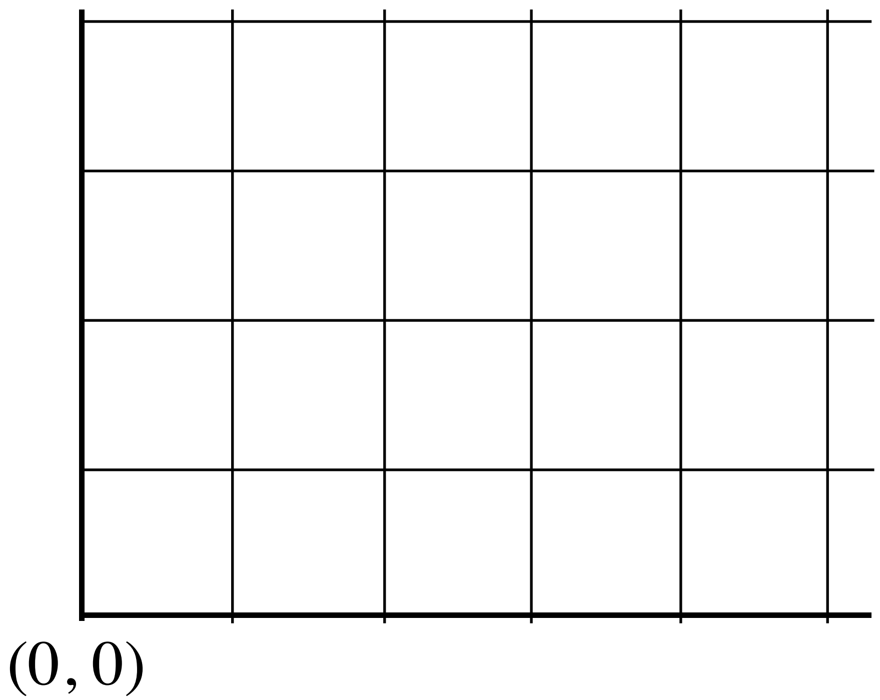
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right) / 4$$





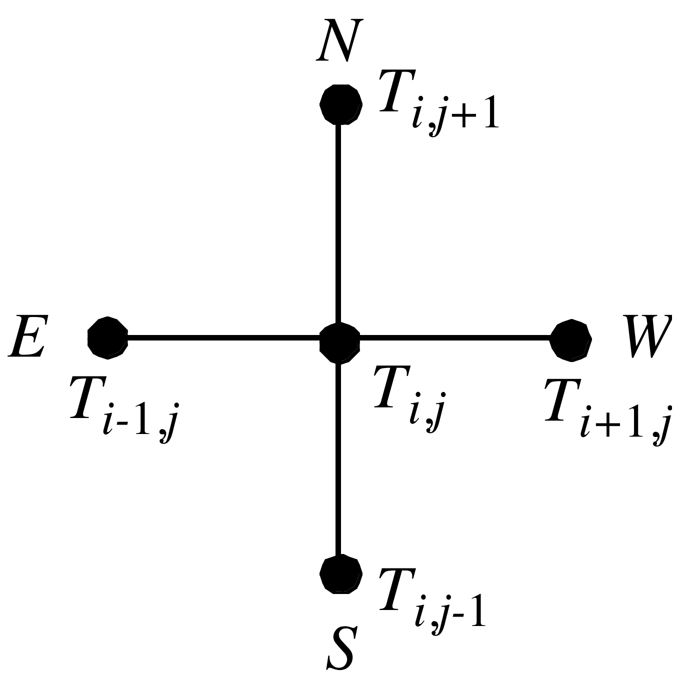
ガウス・ザイデル法とSOR法

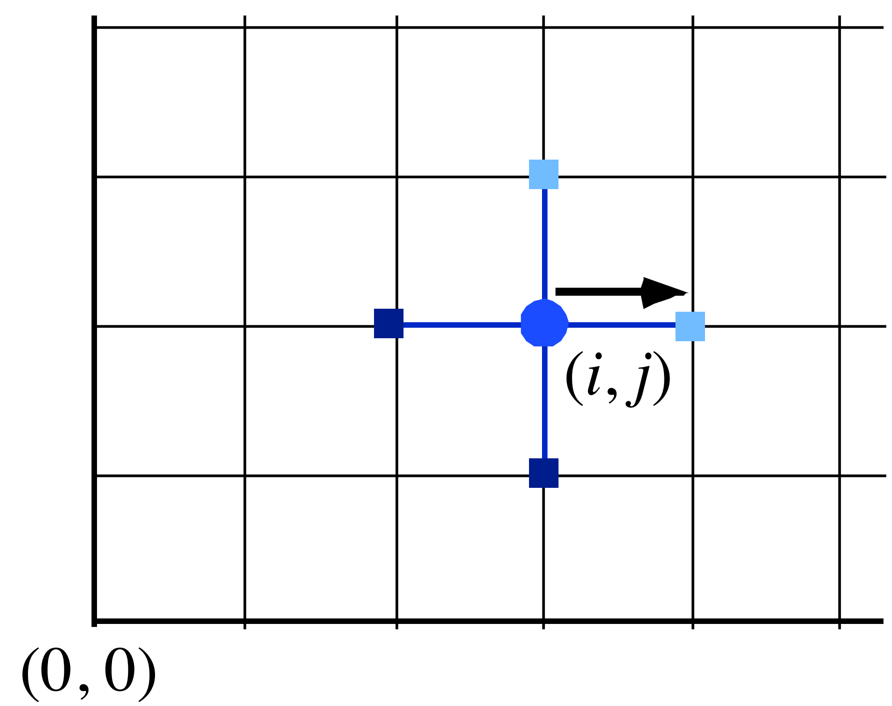
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$





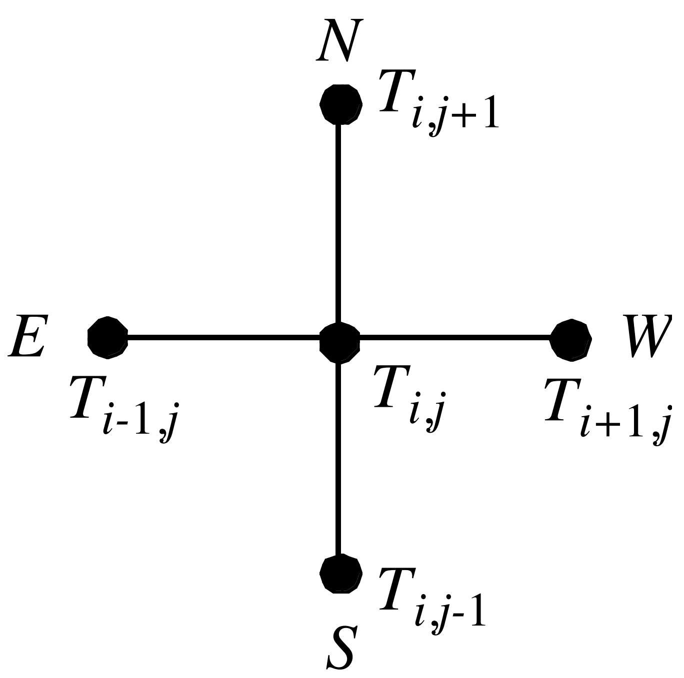
ガウス・ザイデル法とSOR法

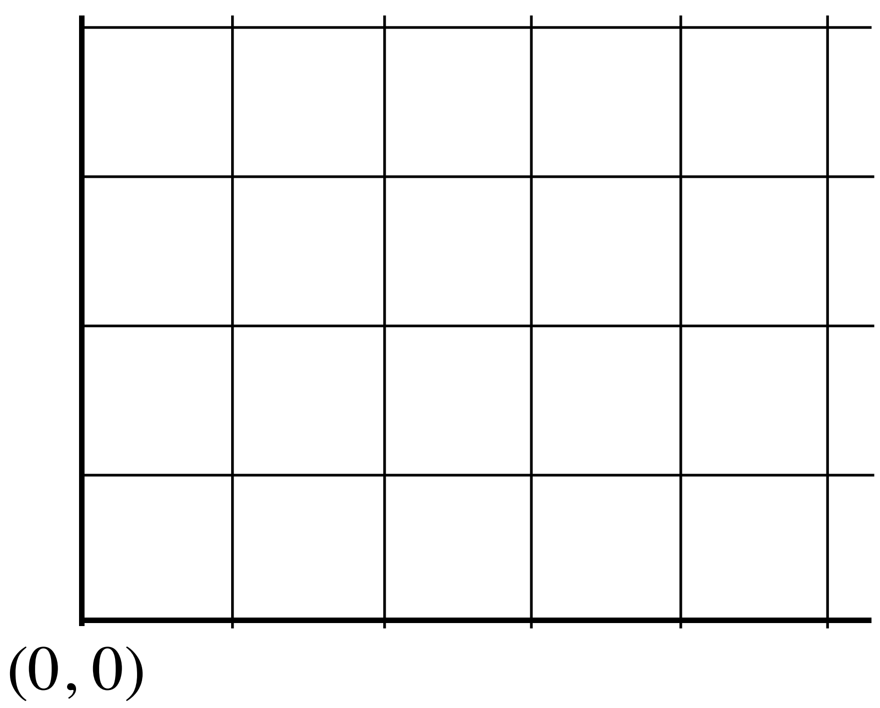
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$





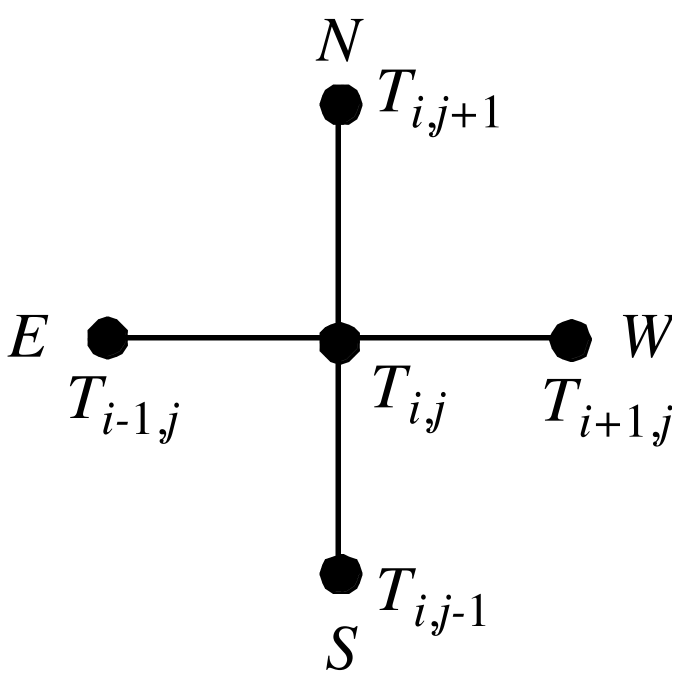
ガウス・ザイデル法とSOR法

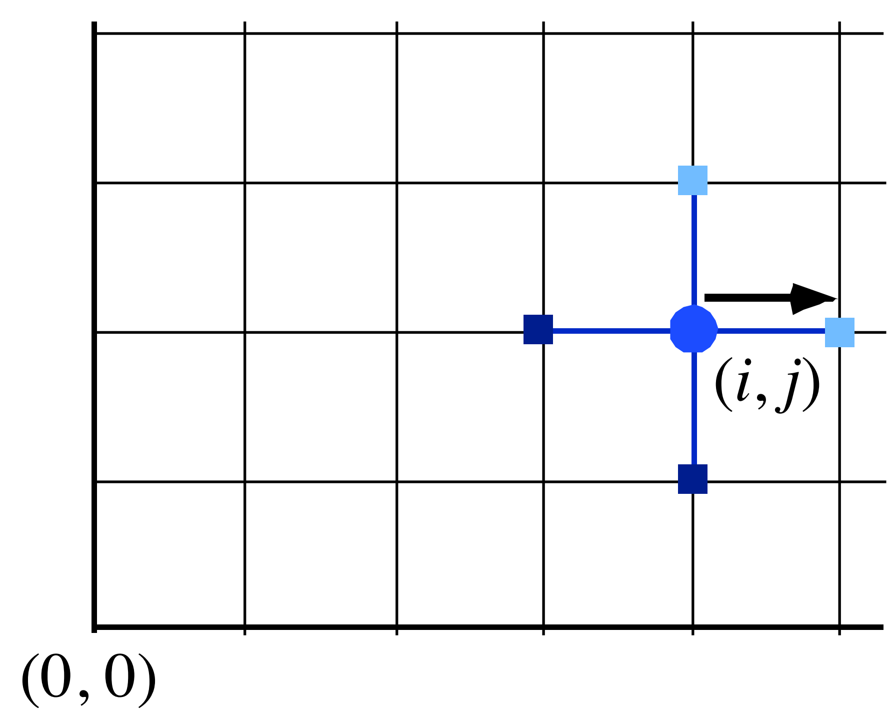
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$





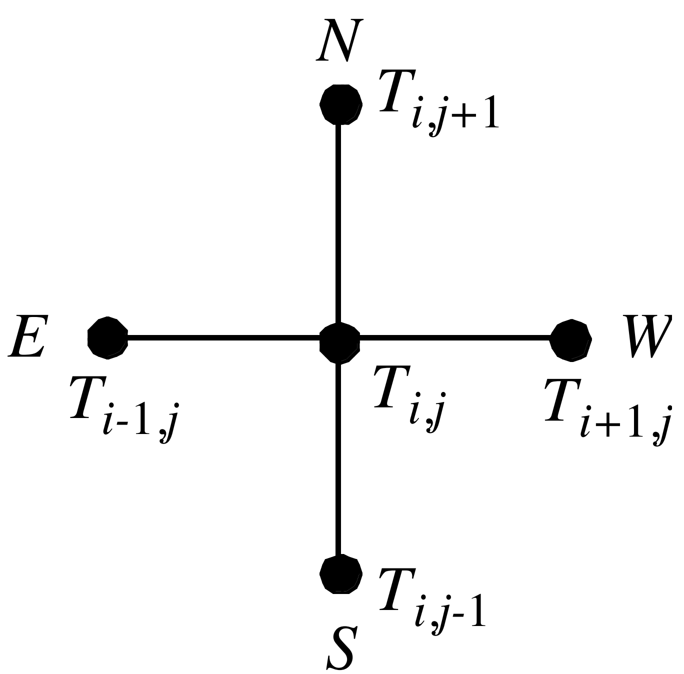
ガウス・ザイデル法とSOR法

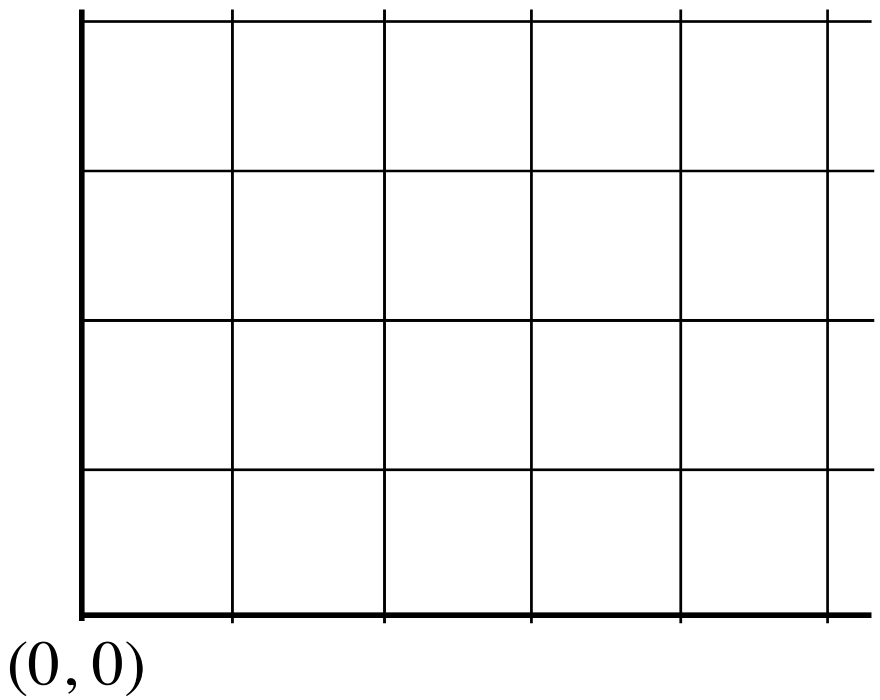
ガウス・ザイデル法

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$

逐次過緩和(Successive Over Relaxation)法

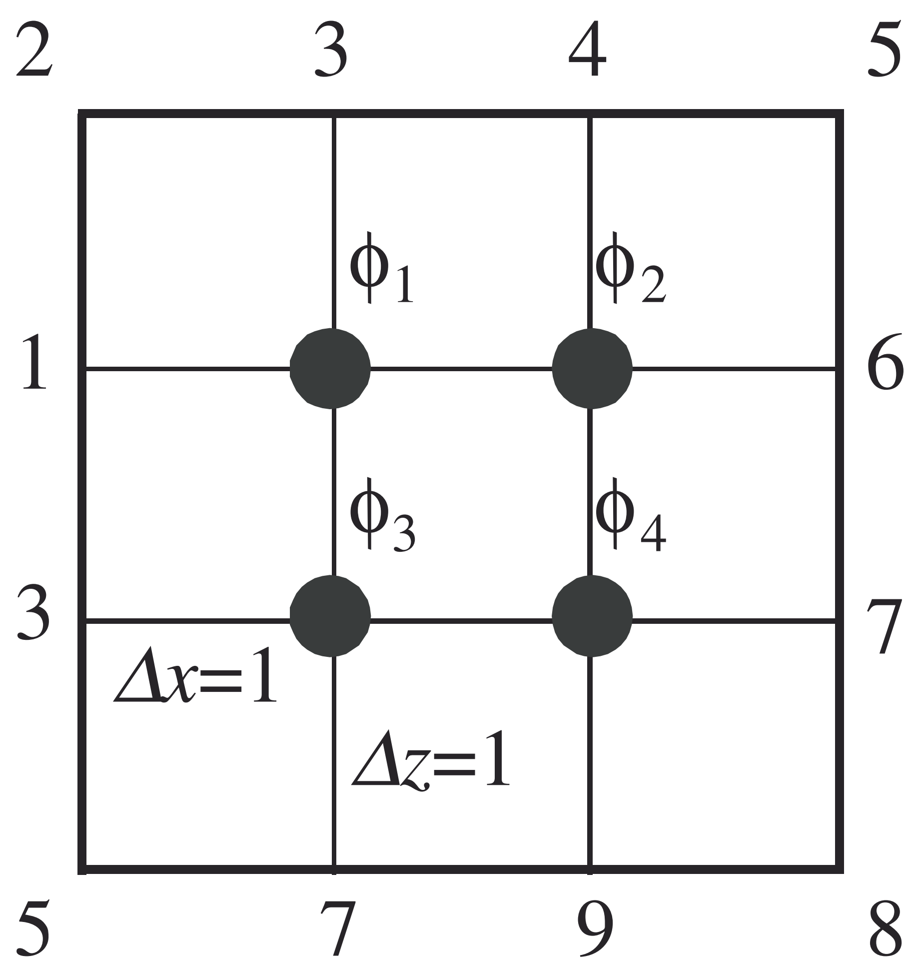
$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n} + \Delta x^2 \rho_{i,j}\right)/4$$





ラプラス方程式と連立一次方程式

問題



$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta x^2} = 0$$

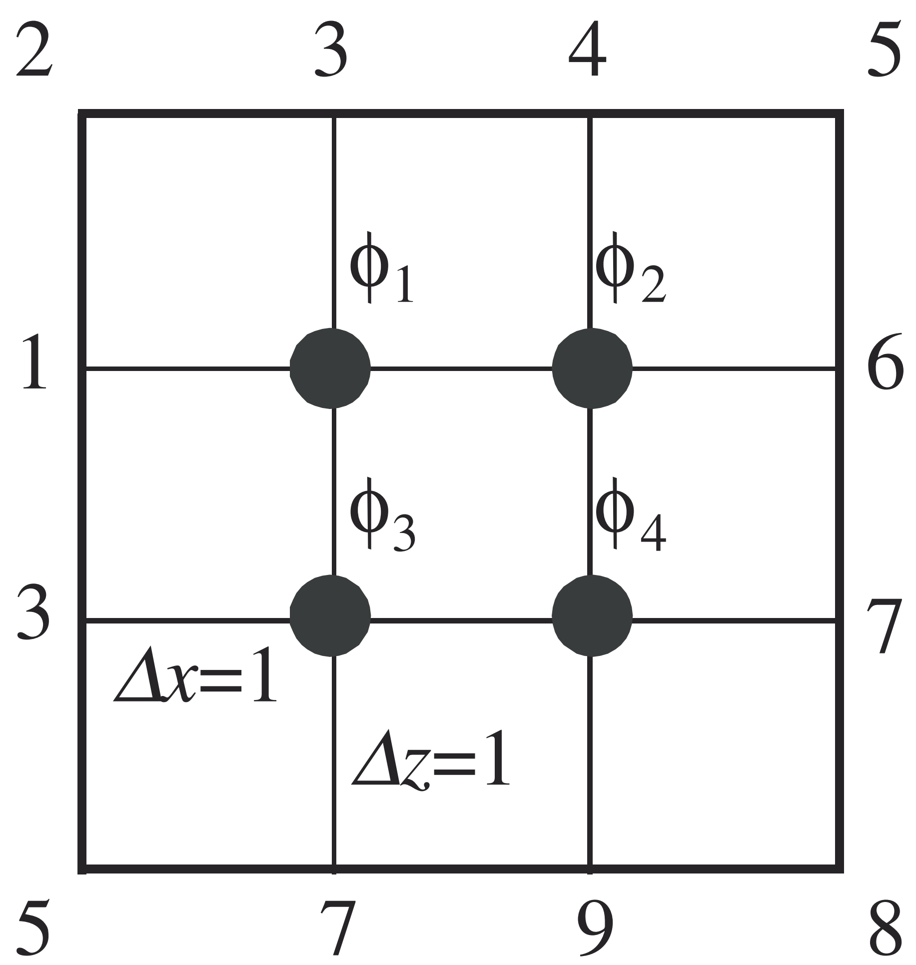
ϕ_1

$$3 + 1 - 4\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

問題の出展：戸川隼人「数値解析とシミュレーション」

ラプラス方程式と連立一次方程式

問題



$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta x^2} = 0$$

ϕ_1

$$3 + 1 - 4\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

$$-4\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + 0\phi_4 = -4$$

$$\phi_1 - 4\phi_2 + 0\phi_3 + \phi_4 = -10$$

$$\phi_1 + 0\phi_2 - 4\phi_3 + \phi_4 = -10$$

$$0\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 4\phi_4 = -16$$

問題の出展：戸川隼人「数値解析とシミュレーション」

数値積分法

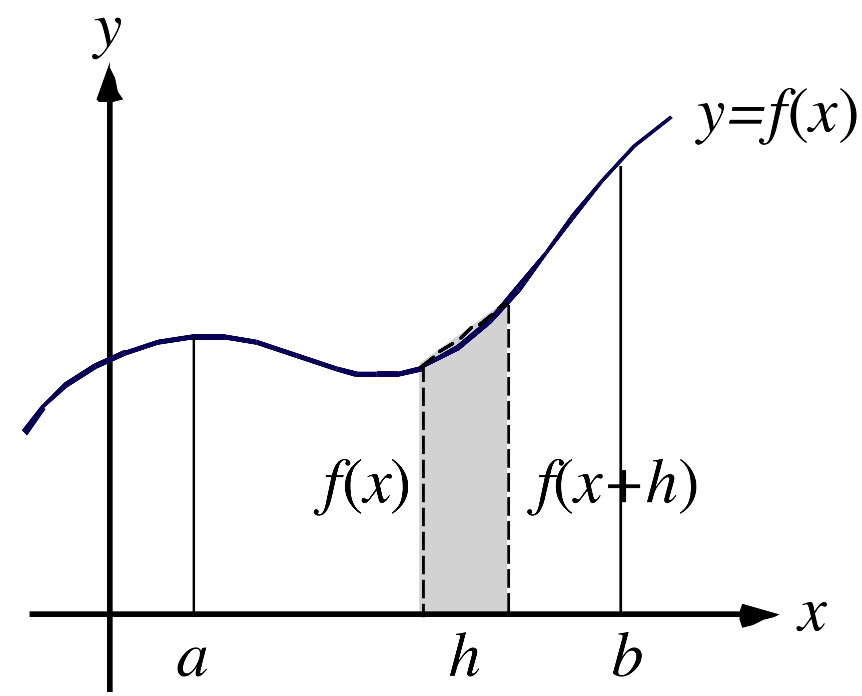
微小部分について積分を求め足し合わせる

台形法

微小部分の関数を直線近似、積分

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(x+h)\right]h$$

$$I = \frac{1}{2}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} 2f(a+ih) + f(b)\right]h$$



シンプソン法

微小部分２つ以上まとめてを２次以上の多項式で近似

$$\Delta S = \frac{1}{3}\left[f(x) + 4f(x+h) + f(x+2h)\right]h$$

$$I = \frac{1}{3}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{N/2-1} 4f(a+\{2i+1\}h) + \sum_{i=1}^{N/2} 2f(a+2ih) + f(b)\right]h$$