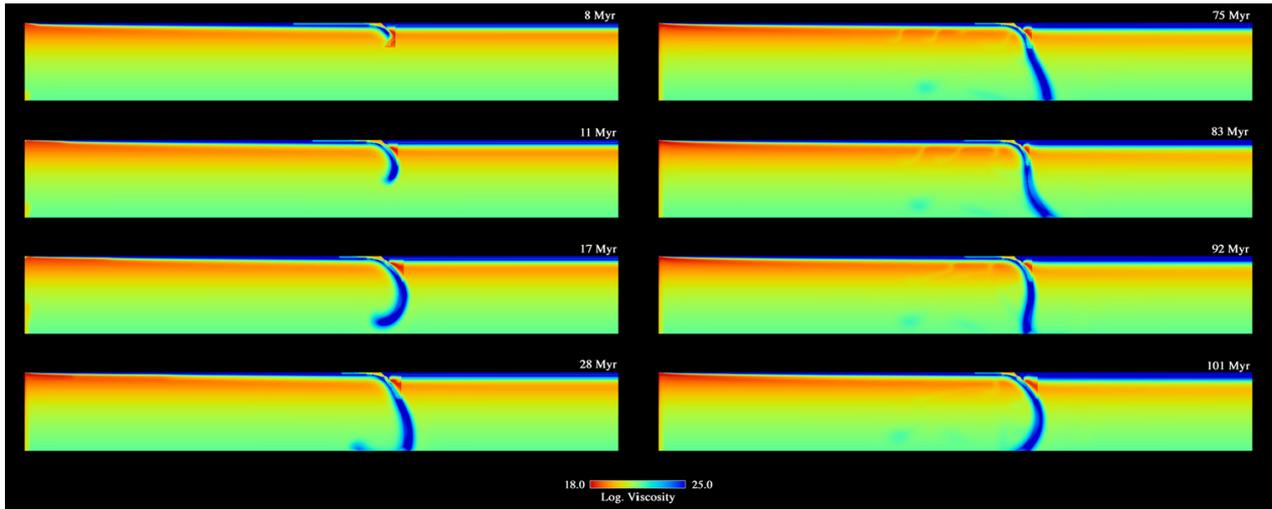


マントル・ダイナミクス

観測および理論からみたマントルの構造と熱・物質輸送

中久喜 伴益



マントル・ダイナミクス

観測および理論からみたマントルの構造と熱・物質輸送

広島大学 大学院理学研究科

地球惑星システム学専攻

中久喜 伴益

2008年3月

更新履歴

1999年 第1版

朝倉書店「地球ダイナミクスの事典」のために執筆

2000年 第2版

研究の進展に合わせて改訂 (原稿が揃わないため、結局出版されず)

第1版を大幅短縮.

2006年9月 第3版

神戸大学大学院・集中講義のために改訂

第2版で短縮した記述を一部復活, 3章, 4.1節を改訂・加筆

2008年3月 第3.01版

広島大学大学院・講義のために第2章をちょこっと加筆, 誤りの修正

未完

観測に関する事項を加筆

ここ数年の研究の進展に合わせて改訂

マントル最深部に関する項目を付加

目次

第1章 マントル対流の性質

- 1.1 対流現象とマントル対流
 - 1.1.1 対流現象
 - 1.1.2 マントル対流とは何か
- 1.2 マントル対流とその研究
 - 1.2.1 マントル対流へのアプローチ
 - 1.2.1 マントル対流の性質とその問題

第2章 観測・実験から見たマントル対流

- 2.1 マントル対流に関する観測データ概略
 - 2.1.1 地球物理学データ
 - 2.1.2 地球化学および地質学データ
 - 2.1.3 高圧実験データ
- 2.2 観測とマントル対流への制約 (未完)
 - 2.2.1 地震波速度構造とトモグラフィー
 - 2.2.2 ジオイドとマントルの粘性率
 - 2.2.3 電気伝導度

第3章 マントル対流を記述する方程式

- 3.1 流体の基礎方程式
 - 3.1.1 連続の式
 - 3.1.2 運動方程式
 - 3.1.3 構成方程式と Navier-Stokes 方程式
 - 3.1.4 エネルギー方程式
 - 3.1.5 状態方程式
- 3.2 マントル対流の基礎方程式
 - 3.2.1 状態方程式の線形化
 - 3.2.2 マントル対流理論で用いられる近似
 - 3.2.3 基礎方程式のスケーリング (無次元化)
 - 3.2.4 相転移と組成変化
 - 3.3.5 レオロジーの式
 - 3.3.6 2次元の場合の方程式
 - 3.2.7 まとめ

第4章 マントル対流の理論的扱い

- 4.1 マントル対流の解析的理論

- 4.1.1 無限小振幅理論 - 対流の開始
- 4.1.2 境界層モデル
- 4.1.3 プレート冷却モデル
- 4.1.4 断熱温度勾配
- 4.1.5 境界層モデルの次元解析
- 4.1.6 有限振幅理論 - 境界層理論
- 4.2 マントル対流の数値シミュレーション
 - 4.2.1 マントル対流の数値計算法
 - 4.2.2 差分法によるマントル対流の数値計算
- 4.3 マントル対流の数値モデルと基本的性質
 - 4.3.1 粘性率一定下部加熱モデルとレイリー数の変化
 - 4.3.2 内部加熱の影響
 - 4.3.3 圧縮性の影響
 - 4.3.4 粘性率の温度依存性の影響
 - 4.3.5 粘性率の圧力依存性の影響
 - 4.3.6 粘性率の応力依存性 (非線形レオロジー) の影響
 - 4.3.7 3次元対流
 - 4.3.8 球殻内の対流
 - 4.3.9 相境界の影響
 - 4.3.10 化学境界

第5章 地球および固体惑星内部の熱・物質輸送

- 5.1 マントル対流数値モデルとマントルダイナミクス
 - 5.1.1 マントル対流とプレートテクトニクス
 - 5.1.2 大陸プレートの影響
 - 5.1.3 ホットスポットとマントルプルーム
 - 5.1.4 マントル対流の層構造
 - 5.1.5 スタグナントスラブ (未完)
 - 5.1.6 マントル最深部の構造とダイナミクス (未完)
- 5.2 マントル対流による熱輸送と地球の熱史
 - 5.2.1 パラメータ化対流論による地球の熱史モデル
 - 5.2.2 地球の熱史の動力的モデル
 - 5.2.3 熱史モデルとデータとの整合性

第1章 マントル対流の性質

1.1 対流現象とマントル対流

1.1.1 対流現象

対流とは、流体中で熱あるいは物質を輸送するプロセスの1つである。対流は流体が移動することにより、熱あるいは物質が輸送されるものである。対流の代表的なものは流体を下面から熱した場合に起きるものである。暖められた流体は密度が低くなるため浮力を持ち、上昇する。このとき熱が上方に運ばれる。熱による浮力が原因で起きる対流を熱対流と呼ぶ。密度差が物質の組成が変化するために生じて起こる対流を組成対流と呼ぶ。流体が静止していた場合にも、加熱により対流は自発的に発生する。このような対流を自然対流と言う。一方、流体が別の原因で移動し、それにより熱や物質が運ばれるような対流は強制対流と呼ばれる。過去において、マントル対流に対する組成変化の影響がどの程度あったかはまだよく分かっていないが、現在のマントル対流は大ざっぱに言って熱による自然対流と見なすことができる(図1.1)。

1.1.2 マントル対流とは何か

マントルは前述のように岩石からなる。岩石は固体であり、我々が普通に考える時間スケールでは弾性や脆性をしめす。しかし、氷河の後退による跳ね返り (post glacial rebound) のように1000年以上の長い地質学的時間スケールでは、固体も非常にゆっくりと流動する。このような場合、マントルは非常に良い近似で流体と考えて良い。マントル対流はマントル内部の温度差、たとえば地表の低温と核・マントル境界の高温との温度差により浮力(沈降力)を生じて、流体のマントルが非常にゆっくりとした対流を起こす現象と考えることができる。例えば、プレートの運動は、地表面で冷えた流体がその重さで沈降してゆくときに生じる地表の流れであると考えられる。マントル内部に温度差を生じる原因や、対流の熱源については後で述べる。

1.2 マントル対流とその研究

1.2.1 マントル対流へのアプローチ

マントル対流の研究法も他の地球物理現象と同様、理論的研究と観測的研究の二つに分かれる。地球内部物質の研究とは異なり、実験的研究は時間的・空間的スケールを再現することが難しいので、限定的に行われている。コンピュータが発展したため、数値シミュレーションが広く用いられている。流体の混合や3次元プレート・マントル結合

のような問題は現在でも数値シミュレーションで解くことが難しく、実験もよく用いられている。時間空間スケールの再現性の他、数値シミュレーションが優れている点は、境界条件 (自由すべり条件) 及びモデルの形状 (3次元球殻) を地球に近い条件に設定できること、マントル内部の圧力の再現の2点である。また、数値シミュレーションの一般的な性質として系を理想的な状態に保つことができることがあげられる。以下は理論的および観測的研究の特色である。

(1) 理論的研究

理論的研究では、マントルの物性等の物理的性質をパラメータとし、連続体力学などの物理法則に基づいてできるだけ簡単なモデルを作成する。マントル対流の研究では、支配方程式 (特にレオロジー法則) およびパラメータが完全に分かっていないため、支配方程式やパラメータの影響を評価するための物理モデルを作成することが主な役割である。モデルからマントル対流の持つべき性質を予測し、これを観測と比較して、モデルの妥当性を検討する。対流は本質的に非線形系であるので解析的に解が得られるのは、ごく限られた場合だけである。対流の開始の議論のように非線形性が弱く線形化が可能な場合や、粘性率一定の場合については解析可能な問題もある。従って、数値シミュレーションは理論的研究を行う上で必須のものである。

(2) 観測的研究

観測的研究は、現在及び過去の地球惑星内部の物理的・化学的状态を地球物理学、地球化学、地質学データを元に推定する方法である。しかし、これらのデータの解釈全てが物理モデルに基づいているということを忘れてはならない。観測データに基づいた議論は、第2章にまとめる。

1.2.2 マントル対流の性質とその問題

マントル対流は、我々が普通に考える流体の対流とはだいぶ異なる性質を持っている。流体力学的にマントル対流を考える場合、以下のような特徴がある。これらの特徴のほとんどは数値シミュレーションでないと取り扱えないものである。

(1) 流体の形状が三次元球殻である。

言うまでもなくマントルは非常に厚い球殻である。従って、マントル対流には3次元性や曲率が大きな影響を与えているはずである。マントル対流全体の構造を考えるときはこれらの影響を無視できない。しかし、問題 (特に数値計算上の問題) を簡単にするために2次元や箱型の対流のモデルがよく用いられる。従って、その結果の解釈には注意が必要である。また、流体が厚いことによってマントル対流のレイリー数は大きい。

(2) 流体の慣性が効かない。

マントルは非常に粘性率が高いため、浮力の効果と応力 (粘性応力および圧力) は瞬時に釣り合ってしまう。従って慣性の効果はほとんど零に等しい。運動方程式の左辺 (慣性項) は0と置くことができる。

(3) 粘性率が大きく変化する。

我々の身の回りにある流体では、ほとんどのものが粘性率が一定であると近似して差

し支えない。しかし、マンツルの粘性率は温度・圧力・応力に対して強い依存性を持つ。例えば温度が数10から100K程度変わっただけで粘性率は1桁も変化する。マンツル内部の温度差は数100度から1000度程度と考えられるから、粘性率は何桁も変わる。従って、粘性率は変化するものとして取り扱われねばならない。

(4) マンツル物性の圧力依存性がある。

地球内部の圧力は非常に大きい。そのため物質は圧縮されて、粘性率などの物性が深さによって大きく変化する。また、圧力によって相転移が起こり、これに伴って物性が不連続に変化する。

(6) 内部加熱源を持つ。

マンツル中には放射性元素が存在しており、単位質量あたりの量はわずかだが、マンツル全体で見ると膨大な量となる。その量は底面(核)からの加熱量の10倍程度と考えられている。従って、マンツル対流は主として内部から加熱される系である。

(7) 非定常状態である。

マンツル対流の熱源は前述のように主として放射性元素の崩壊なので、時間とともに減少する。さらに、初期地球は現在より高温であったと考えられる。すなわち、地球は冷却途上にあると考えられる。従って、マンツル対流は本質的に非定常状態にある。従って、定常状態あるいは統計的平衡状態の解を元にマンツル対流を議論する場合は注意が必要である。

(8) 物質の分化が起きる。

一般に対流の問題では対流による物質の混合のみが議論される。これは、混合される不均質の浮力の影響を無視できるためと、不均質生成のメカニズムを持たないためである。マンツルは、部分融解によるマグマの分化という不均質生成のメカニズムを持つ。さらにマンツルでは、熱膨張による密度変化が大変に小さいため、組成の変化は流れに大きな影響を及ぼす。従って、マンツルがマグマを大量に発生するような高温では、物質の分化に伴う組成変化を無視できない。このような対流は惑星初期に重要であると考えられる。

マンツル対流はほとんど全ての地学現象の原動力であるので、マンツルのダイナミクスを理解することは地球科学にとって非常に重要である。マンツル対流理論の問題では、上に述べた性質がマンツルのダイナミクスへ与える影響を調べて、地学現象とどう関わっているのか1つずつ理解してゆく。地球惑星科学において重要なマンツル対流の問題は以下のようなことである。それは、(1) 現在・過去のマンツル対流の構造、(2) 地球型惑星のテクトニクス、(3) 地球型惑星の熱・化学進化、の3つである。(1)には、マンツル対流の層構造の問題や、ホットスポット火山とプルームの問題などが含まれる。ただし、相互に関係し合っているので、問題を切り離すことが出来なくなる場合も当然でてくる。

これらは、対流理論の言葉で言い換えると、(1) 地球内部物性とマンツル対流の相互作用、(2) マンツル物質のレオロジーと地表における熱境界層の振る舞い、(3) マンツル対流による熱・物質の輸送、ということになる。

図1.2にマンツル対流研究の流れと方向性をまとめた。この図では、上に掲げたマン

トル対流の性質とマントル対流の問題との結びつきを示したものである。マントル対流研究の流れは、実際、図1.2 を実現する方向へ向かっている。

第2章 観測・実験から見たマントル対流

2.1 マントル対流に関する観測データ概略

2.1.1 地球物理学データ

地球物理学的観測は主として現在のマントルに関する情報を与える。従ってそれを解釈する場合、我々が見ているものがマントル対流の1スナップショットに過ぎないことに注意すべきである。同時に、その1スナップショットは過去の変化の積み重ねによるものだということを忘れてはならない。地球物理学的観測には以下のようなものがある。

(1) 地球の球対称地震波速度構造

地震波の速度構造は組成および温度に依存して変化する。地震波の速度構造にはいくつかの不連続面が存在している。不連続面が物性実験から得られた相変化と関連づけられれば、その深さから温度を知ることが出来る。さらに、マントルが断熱温度勾配に近い温度構造をしているか否かも検証される。

(2) 3次元地震波トモグラフィー

3次元の地震波速度構造から、温度あるいは組成の3次元分布に関する情報が得られる。解像度の点で問題があるが、他の情報に比べて視覚的でより直感的である。平均二乗残差速度などの統計的な量を使えばより定量的な議論を行うことができる。

(3) 波形解析

観測された波形を理論波形と合わせることにより、トモグラフィーからでは得られないマントルの微細な構造についての情報が得られる。相境界面の凹凸やスラブ内の速度変化、D"層の微細構造の研究などに用いられている。

(4) ジオイド高および重力異常

ジオイド高および重力異常は地球内部の密度分布に関する情報を与える。これらの量は地球内部の密度境界面の変形を含む密度分布で決まる。境界面の変形はマントル中の流れによって決まるので、ジオイド、重力を計算するためにはマントル対流場を計算しなければならない。特にジオイドはマントル内部の粘性率を敏感に反映するので、粘性構造に対する重要な情報である。

(5) 後氷期変動

後氷期変動の速度からマントルの粘性率に関する情報が得られる。ジオイドが粘性境界の粘性比を強く反映するのに対して、平均的な粘性率の絶対値を得ることが出来る。

(6) 地殻熱流量

地殻熱流量は対流の原動力である熱の放出量である。地球化学的に推定される放射性熱源の量と合わせると、地球の冷却速度を見積もることが出来る。また、核からの熱流量はホットスポット周辺の高地形から推定されている。

(7) 電気伝導度

電気伝導度は磁気嵐等によって引き起こされる地球内部の誘導電流による磁場や電位差を観測することにより得られる，地震波速度が温度に対してリニアな変化を示すのに対して，電気伝導度はアーレニウス型の温度依存性を持つ．このため，高温異常に敏感である．また，溶融や水が存在すると急激に電気伝導度は大きくなるので，地球内部の流体の存在について重要な情報を与える．ただし，誘導電流は拡散方程式に従って内部に浸透するので，マントル深部では分解能が悪くなる．

(8) 古地磁気学データ

岩石はキュリー点温度を経験したときの磁場を記録するから，古地磁気学データは地質学データと同様時間軸を持っている．古地磁気データから得られるものは，地表の運動である．後で述べるように，地表の運動は地球の冷却と大きくかかわっているので重要なデータである．

2.1.2 地球化学および地質学データ

地球物理学的観測と比較して，時間軸を持つ情報ということが特徴である．過去のマントルに関する情報源として重要である．

(1) 同位体組成

マントル内部の独立したリザーバーに関する情報が得られる．マントル対流の混合メカニズム，層構造などに対する制約条件である．

(2) 火成岩

過去のマントルの温度および組成に関する情報が得られる．過去の温度は熱史モデルの制約条件となる．また，火成活動度に関する情報源である．

(3) 堆積物

過去の表層運動に関する情報を与える．プレート運動の存否，プレート運動の速度，海水準変動，火性活動度などの情報が得られる．また，海水準変動は海洋地殻やプレートの厚さに依存するので，マントルの温度に対し制約条件を与える．

第3章 理論から見たマントル対流

3.1 流体の基礎方程式

マントル対流を記述する式は、連続の式(質量保存の式)、運動方程式(運動量保存の式)、エネルギー方程式(エネルギー保存の式)、状態方程式、構成方程式である。なお、ここで用いられる記号、無次元量について表1、表2にまとめた。

3.1.1 連続の式

質量保存則は連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

により表される。ラグランジュ (Lagrange) 微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (3.2)$$

を使って式 (3.1) を書き直すと、

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

となる。左辺第1項は一定の質量を持つ流体素片が占める体積の変化率を表している。特に非圧縮性流体、すなわち密度一定の時は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

となる。

3.1.2 運動方程式

運動量の保存は、コーシー (Cauchy) の運動方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (3.5)$$

により表される．ただし，右辺第2項は

$$\nabla \cdot \tau = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

である．この式の左辺は単位体積の流体素片の質量 (ρ) と加速度の積，即ち流体素片の持つ運動量の時間変化を表す．右辺第1項と第2項は流体素片にはたらく表面力 (面を通してはたらく力) を表す．このうち，第1項は流体の圧力 p による等方的な応力，第2項は偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor) で表される非等方的な応力である．流体素片にはたらくトルクのつりあいを考えると，偏差応力テンソルは対称テンソル

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (3.7)$$

であることが分かる．これにより角運動量保存則が成り立つ．右辺第3項は流体素片に働く体積力 (外力) を表す．マントルに働く体積力としては重力のみを考えれば良い．外力項の g はポワソン方程式を解いて得られるが，地球のマントル中では g はほぼ一定である．電磁気力や地球の自転によるコリオリ力などはマントルの粘性力に比べて小さく無視できる．

3.1.3 構成方程式とNavier-Stokes方程式

物体の変形と物体内に働く応力を結びつける式が構成方程式である．運動方程式と構成方程式を結びつけることにより，流体の速度に関する閉じた方程式が得られる．

まず，歪み速度テンソルおよび渦度テンソルを定義しておく．物体上の微小な dx が流速ベクトル $u(x)$ により単位時間で dx' に移動したとする (図3.1)．もし， $u(x)$ が一定なら物体は回転も変形もしておらず，平行移動を表す．流速 $u(x)$ が場所によって異なるときには回転・変形が起きる．つまり， du (u の空間微分量) は回転と変形を含んでいる．ここで， du は $u(x)$ の全微分で表される．

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \quad (3.8)$$

ここで， i -成分を添字 i を使って表すことにすると，

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (3.9)$$

である。ここで、 $\partial u_i / \partial x_j$ は添字を2つ持つ量で、速度勾配テンソルと呼ばれる。この式を少し変形すると

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j - \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (3.10)$$

となる。

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} dx_j - \sum_{j=1}^3 \zeta_{ij} dx_j \quad (3.11)$$

と書くことにする。 ε_{ij} は歪速度テンソルと呼ばれ、 ζ_{ij} は渦度テンソルと呼ばれる。歪テンソルは

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.12)$$

対称である。回転テンソルは

$$\zeta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot} \mathbf{u})_k \quad (3.13)$$

と表され、反対称テンソルである。テンソルの成分がベクトルの回転成分に対応する。渦度テンソルは剛体回転を表すので、流体中の偏差応力に寄与しない。従って歪み速度テンソルと応力テンソルの間の関係を考えればよい。

流体では歪み速度テンソル ε_{ij} が偏差応力テンソル τ_{ij} に比例すると仮定する。この仮定は身の回りにある流体では良い近似となっている。このような流体をニュートン流体と呼ぶ。このとき、比例係数は一般に4階のテンソルとなる。流体が等方的であるとすれば、2つの比例係数のみとなり

$$\tau_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.14)$$

のように表される。テンソルの対角和を取り、空間の3方向に平均すると

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \tau_{ii} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ii} \left(\lambda + \frac{2}{3} \eta \right) = k_B \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ii} \quad (3.15)$$

となる．ここで現れる $k_B = \lambda + (2/3)\eta$ を体積粘性率 (bulk viscosity) と呼ぶ．体積粘性率は流体の体積変化に伴う粘性応力の比例係数である．多くの流体で k_B は非常に小さいことが知られており， $k_B = 0$ と近似 (Stokes 近似) できる．これにより，偏差応力テンソルの成分は，

$$\tau_{ij} = 2\eta\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\eta\sum_{k=1}^3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^3\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \quad (3.16)$$

となる．式 (3.10) をコーシーの運動方程式 (3.5) に代入すると，流体の運動方程式として知られるナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^3\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right] + \rho g_i \quad (3.17)$$

が得られる．ベクトル表示では

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\eta\left\{\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right\}\right] - \frac{2}{3}\nabla(\eta\nabla\cdot\mathbf{u}) + \rho\mathbf{g} \quad (3.18)$$

と書ける．特に非圧縮を仮定すると，

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right] + \rho g_i \quad (3.19)$$

と表される．

3.1.4 状態方程式

熱力学的考察によると，物質の状態は2つの状態変数 (温度 T , 圧力 p など) によって表される．すなわち，状態方程式は一般的に3つの変数を含んだ式

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad (3.20)$$

により表される．状態方程式を具体的に表すには，熱膨張率 α や等温非圧縮率 K_T を用いるのが便利である．これらは以下のように定義される．

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{K_T} = \beta_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (3.22)$$

3.1.5 エネルギー方程式

マントル対流で考慮すべきエネルギーは熱エネルギーと運動エネルギーの2つである。運動エネルギーの保存則は運動量の保存則から導かれるので、ここでは考えない。

熱エネルギーの第2法則より、熱エネルギーの保存則は

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho H \quad (3.23)$$

と表される。ここで、 T は温度、 s は単位体積あたり (小文字で表す) エントロピー、 H は単位質量あたりの内部加熱 (放射性元素による) である。右辺第1項は粘性散逸による発熱で

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

と書ける。非圧縮性流体の場合には、

$$\Phi = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (3.25)$$

と簡略化できる。右辺第2項は熱伝導による熱輸送 (外向きが正) であり、熱流量 \mathbf{q} は Fourier の法則により、

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (3.26)$$

と表される。ここで、 k は熱伝導率である。

式 (3.22) の左辺を具体的にどのように書き表すかによって、熱エネルギーの保存則は様々な形で表すことが出来る。たとえば、温度 T と圧力 p を独立変数として選ぶと、

$$ds = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp \quad (3.27)$$

となる．ここで C_p は定圧比熱である．これを (3.22) に代入すれば，温度・圧力で表したエネルギー方程式

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + \rho H \quad (3.28)$$

が得られる．左辺の第 2 項は断熱温度勾配を表す．

3.2 マントル対流の基礎方程式

これまで導出してきた式は一般の流体に対して成立する基礎方程式である．ここでは，マントル対流に有効な近似を導入し，基礎方程式を簡略化する．

3.2.1 状態方程式の線形化

始めに状態方程式 (3.19) を簡略化する．相転移や組成の変化を考えなければ，密度 ρ は温度・圧力の関数で表される．すなわち，

$$\rho = \rho(p, T) \quad (3.29)$$

マントルの密度は主として静水圧による変化が大きく，流れの圧力変化や温度変化による影響は比較すると小さい．そのため，密度を静水圧下での基本場 ($\bar{\rho}$) とそれからのずれ (ρ^*) の 2 つに分けて考えてよい．すなわち，

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho^* = \rho(\bar{p} + p^*, \bar{T} + T^*) \\ &\approx \rho(\bar{p}, \bar{T}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p^* + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T^* \\ &= \bar{\rho} + \bar{\rho} K_T p^* - \bar{\rho} \alpha T^* \end{aligned} \quad (3.30)$$

と書ける．静水圧は流速を 0 に置いた運動方程式

$$0 = -\frac{d\bar{p}}{dz} - \bar{\rho} g \quad (3.31)$$

から求められる．ある深さでの平均密度 $\bar{\rho}$ は (3.30) と

$$\frac{1}{K_s} = \beta_s \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (3.32)$$

より,

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = -\frac{\bar{\rho}g}{K_s} = -\frac{\bar{\rho}g}{\sqrt{V_p^2 - V_s^2}} \quad (3.33)$$

から求められる．ここで， K_s は断熱非圧縮率である．この式はウィリアム・アダムソン (William-Adamson) の状態方程式と呼ばれる． g と K_s が一定なら，密度は

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp\left[\frac{\rho_0 g}{K_s}(1-z)\right] \quad (3.34)$$

と書くことが出来る．

3.2.2 マントル対流理論で用いられる近似

ここでは，数学的に厳密な議論をせずに，マントル対流で用いられる近似式を導入する．厳密には方程式を無次元化して項の大きさを評価する必要がある．

流体の運動方程式は音波も含んでいる．マントル対流はゆっくりとした流体の運動なので，音波による高周波の圧力変化の影響を受けない．したがって，圧力・密度の時間偏微分を取り除いた近似を考えることが出来る．このような近似を非弾性近似 (unelastic fluid approximation) と呼ぶ．連続の式から密度の時間変化を取り除くと，

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0 \quad (3.35)$$

となる．エネルギー方程式は，

$$\bar{\rho} C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T w \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + \rho H \quad (3.36)$$

と表される．ここで， w は流速の z 成分である．

次に運動方程式を考える．マントルは粘性が非常に大きいため，常に粘性応力と浮力が釣り合いを保ちつつ流れが起きる．すなわち流体の慣性は無視することが出来る．従って運動方程式の左辺は0に置くことが出来る．つまり，

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} \right] - \frac{2}{3} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho g \quad (3.37)$$

である．式 (3.35), (3.36), (3.37)を組み合わせると非弾性近似によるマントル対流の方程式が得られる．これは，マントル対流理論においてもっとも近似度合いの低い方程式で

あると考えて良い．

圧縮による密度変化が小さいなら，連続の式の密度のみを一定と置いた式を使うことが出来る．このような近似を拡張ブジネスク近似(Extended Buossinesq approximation)と呼ぶ．このときは，運動方程式はさらに簡略化されて，

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} \right] + \rho \mathbf{g} \quad (3.38)$$

となる．数値的な扱いが楽なので，数値シミュレーションではよく用いられている．さらに，圧縮による温度勾配が小さいと仮定できるなら，エネルギー方程式の断熱温度勾配項と粘性散逸項を落とすことができる．この近似をブジネスク近似と呼ぶ．この場合にはエネルギー方程式は対流項，拡散項，内部加熱による発熱項のみを持ち，

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho H \quad (3.39)$$

となる．

3.2.3 基礎方程式のスケーリング(無次元化)

上記の近似がどの程度よく成り立っているか見極めるため，各項の大きさを見積る．これには基礎方程式を無次元化する必要がある．無次元化は，長さ，時間，速度，圧力(応力)，温度に対して次のような基準となるスケールを用いて行う．

$$x = hx' \quad (3.40)$$

$$z = hz' \quad (3.41)$$

$$t = \frac{h^2}{\kappa} t' = \frac{h^2 \rho_r C_p}{k} t' \quad (3.42)$$

ここで，ダッシュの付いた量が無次元量である．これらを用いると，他の無次元量と次元量の間関係は

$$\mathbf{u} = \frac{\kappa}{h} \mathbf{u}' \quad (3.43)$$

$$p = \frac{\eta_0 \kappa}{h^2} p' \quad (3.44)$$

$$T - T_0 = \Delta T T' \quad (3.45)$$

$$\rho = \rho_r \rho' \quad (3.46)$$

となる．

次に状態方程式を無次元化する．状態方程式を基準密度で割ると，

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_r} = \bar{\rho}' \left(1 + \beta_r' M^2 Pr p'^{\beta_r'} - \alpha' \epsilon T'^{\beta_r'} \right) \quad (3.47)$$

が得られる．ここで，新規に導入した量

$$M^2 \equiv \frac{k K_T}{\rho C_p^2 h^2} \quad (3.48)$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\eta C_p}{k} \quad (3.49)$$

$$\xi \equiv \alpha \Delta T \quad (3.50)$$

である．右辺第2項の M はマッハ数 (Mach number) と呼ばれ，系の特徴的な速度と音速の比を表す． Pr はプラントル数 (Prandtl number) であり，動粘性係数(運動量の拡散率)と熱拡散率の比である．それぞれの大きさを見積もると， $M^2 \sim 10^{-33}$ ， $Pr \sim 10^{23}$ ， $\xi \sim 10^{-2}$ である．このことから，第2項および第3項は無視して良いことが分かる．ただし，これらの項は運動方程式の浮力項では無視することが出来ない．というのは，平均密度は圧力項から出てくる静水圧とキャンセルアウトして浮力項から消えてしまうからである．

次に，連続の式に状態方程式を代入して無次元化する．密度の2つの項を無視すると

$$\nabla \cdot (\bar{\rho}' \mathbf{u}') = 0 \quad (3.51)$$

と表される．平均密度はを無次元化した(3.33)から，

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \frac{Di}{\gamma} \quad (3.52)$$

と求められる．特に， Di/γ が一定の時に，平均密度は

$$\bar{\rho} = \exp \left[\frac{Di}{\gamma} (1-z) \right] \quad (3.53)$$

で与えられる．この式は非弾性近似の連続の式と一致する．式(3.32)を使って $\bar{\rho}$ の変化する垂直スケールを見積もると

$$h_d = \left[\frac{1}{\bar{\rho}} \left| \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right| \right]^{-1} = \frac{K_s}{g \bar{\rho}} = \frac{\gamma C_p}{\alpha g} = h \frac{\gamma}{Di} \quad (3.54)$$

ここで，

$$Di = \frac{\alpha gh}{C_p} \quad (3.55)$$

は散逸数(Dissipation number)と呼ばれ，圧縮性の影響の強さを表す．また， γ は

$$\gamma = \frac{\alpha K_S}{\rho C_p} = \frac{\alpha K_T}{\rho C_S} \quad (3.56)$$

熱力学的グリユナイゼンパラメータと呼ばれる．ここで， $h_d \gg h$ なら，圧縮性の影響を無視することは出来る．これは， $Di/\gamma = 0$ とした極限である．しかし，マントル全層に対してはマントルの物性から， $Di \approx 0.5$ ， $\gamma \approx 1$ と見積られる．圧縮性を無視する拡張ブジネスク近似およびブジネスク近似はその程度の近似であることに留意すべきである．上部マントルの対流に対してはもう少し良い近似となっている．

次にNavier-Stokes 方程式を無次元化する．状態方程式を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \bar{\rho}' \frac{Du'_i}{Dt'} = & -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} \delta_{ij} \right) \right] \\ & + g' \bar{\rho}' \beta' \frac{C_p}{C_v} \frac{Di}{\gamma} p'^* - g' \bar{\rho}' \alpha' Ra T' \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる．ここでRaは熱レイリー数

$$Ra = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T g h^3}{\eta \kappa} \quad (3.58)$$

である．熱レイリー数は熱浮力による応力の典型的な大きさ $\rho_0 \alpha \Delta T g h$ と粘性応力の典型的な大きさ $\eta \kappa / h^2$ との比であり，対流の強さを意味する．前述のようにマントルのプラントル数は非常に大きいので，左辺は0と置いてよい．すなわち，

$$\begin{aligned} 0 = & -\nabla' p' + \nabla' \cdot \left[\eta' \left\{ \nabla' \mathbf{u}' + (\nabla' \mathbf{u}')^T \right\} \right] - \frac{2}{3} \nabla' (\eta' \nabla' \cdot \mathbf{u}') \\ & + \bar{\rho}' \beta' \frac{C_p}{C_v} \frac{Di}{\gamma} p'^* - \bar{\rho}' \alpha' Ra T' \end{aligned} \quad (3.59)$$

これが非弾性近似による無次元化された運動方程式である．同時に重力加速度も一定とした．

拡張ブジネスク近似($Di/\gamma = 0$)を適用すると，密度が一定となり，連続の式は非圧縮

性流体の式

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (3.60)$$

と同じになる．運動方程式は

$$0 = -\nabla p' + \nabla' \cdot \left[\eta' \left\{ \nabla' \mathbf{u}' + (\nabla' \mathbf{u}')^T \right\} \right] - \bar{\rho}' \alpha' Ra T' \quad (3.61)$$

となる．物性値一定の時にはパラメータが熱レイリー数のみになる．

エネルギー方程式は無次元化すると，

$$\bar{\rho}' C'_p \frac{DT'}{Dt'} - \alpha' Di w' (T' + T'_0) = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') + \frac{Di}{Ra} \Phi' + \bar{\rho}' H' \quad (3.62)$$

となる．ここで，内部加熱は，

$$H = \frac{k \Delta T}{\rho_0 h^2} H' \quad (3.63)$$

のように無次元化した．拡張ブジネスク近似の場合， $\bar{\rho} = 1$ とすればよい．ブジネスク近似の式は，エネルギー方程式において $Di = 0$ とすることによって得られる．すなわち，

$$\frac{DT'}{Dt'} = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') + \frac{H'}{C'_p} \quad (3.64)$$

である．

3.2.4 相転移および組成変化の取り扱い

マンツルの重要な性質として相境界および化学 (物質) 境界がある．これらは，熱膨張による密度変化と同等あるいはそれ以上の密度変化を伴うので，マンツル対流に重大な影響を与えると考えられる．ここでは，簡単化のために，相・化学境界はそれぞれ1つと仮定し，方程式を導く．

まず，相・化学境界の密度差をそれぞれ， $\Delta \rho_{660}$ ， $\Delta \rho_c$ とおく．

$$\rho = \bar{\rho} + \bar{\rho} K_T p^* - \bar{\rho} \alpha T^* + \Delta \rho_{660} \Gamma_{660} + \Delta \rho_c \Gamma_c \quad (3.65)$$

ここで，相変化および化学変化を表す関数 Γ_{660} ， Γ_c を導入した．これらの関数は，0 か

ら 1 までの値を持ち，階段状に変化して違う相あるいは物質を表す． Γ_{660} は相変化を表す関数（相関数，phase function）で，0（低圧相）から 1（高圧相）までの値をとる．Christensen and Yuen (1985) に従い，

$$\Gamma_{660} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{d_{660}}\right) \quad (3.66)$$

と表されるとする．ここで， π は余剰圧力

$$\pi = p - p_{660} + \chi(T - T_{660}) \quad (3.67)$$

である．ここで， χ は相転移のクラペイロンスロープ， p_{660} は温度が T_{660} の時に相転移が起きる圧力， d_{660} は相転移が完了する圧力の1/2である．

一方， Γ_c は組成変化を表す関数である．とりあえず化学境界関数と名付けておこう．マントル中では物質の拡散が熱拡散と比較して無視できるほど小さい（ 10^{-12} ）ので移流方程式

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Gamma_c = 0 \quad (3.68)$$

に従う．

運動方程式の浮力項には式 (3.65)で新たに導入した項が付け加わる．無次元の場合に浮力項は

$$\bar{\rho}' \beta' \frac{C_p}{C_v} \frac{Di}{\gamma} p^{*'} - \bar{\rho}' \alpha' Ra T' + P_{660} Ra \Gamma_{660} + C Ra \Gamma_c \quad (3.69)$$

である．ただし，

$$P_{660} = \frac{\Delta \rho_{660}}{\rho_0 \alpha \Delta T} = \frac{R b_{660}}{Ra} \quad (3.70)$$

$$C = \frac{\Delta \rho_c}{\rho_0 \alpha \Delta T} = \frac{R b_c}{Ra} \quad (3.71)$$

であり，それぞれ，相浮力パラメータ，化学浮力パラメータと呼ばれる．これらは熱浮力に対する相境界および化学境界の浮力の相対的大きさを表す．相浮力パラメータは，無次元化したクラペイロンスロープ χ'

$$\chi = \frac{\rho_0 g h}{\Delta T} \chi' \quad (3.72)$$

と浮力比の積になっている．また， Rb_{660} と Rb_c はそれぞれ相境界レイリー数，化学境界レイリー数と呼ばれ，

$$Rb_{660} = \frac{\Delta \rho_{660} g h^3}{\eta \kappa} \quad (3.73)$$

$$Rb_c = \frac{\Delta \rho_c g h^3}{\eta \kappa} \quad (3.74)$$

で表される．

一方，エネルギー方程式には相転移の潜熱を表す項が加わる．すなわち，

$$\bar{\rho} C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T w \frac{d\bar{p}}{dz} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + \rho H + Q_L \quad (3.75)$$

ここで，潜熱とクラペイロンスロープの関係は

$$L = \chi (T + T_0) \frac{\Delta \rho_{660}}{\bar{\rho}_{660}} \quad (3.76)$$

であるので，単位時間あたりの発熱は，

$$Q_L = \chi (T + T_0) \frac{\Delta \rho_{660}}{\bar{\rho}_{660}} \frac{D\Gamma_{660}}{Dt} \quad (3.77)$$

で与えられる．無次元化すると，エネルギー方程式は，

$$\begin{aligned} \bar{\rho}' C_p' \frac{DT'}{Dt'} - \alpha' Di w' (T' + T_0') \\ = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') + \frac{Di}{Ra} \Phi' + \bar{\rho}' H' + Di \chi' P (T' + T_0') \frac{D\Gamma_{660}}{Dt} \end{aligned} \quad (3.78)$$

ここで，ブジネスク近似 ($Di = 0$) を適用すると潜熱項も0になることに注意しよう．相関数中の π は無次元化すると，圧力が無次元の深さで置き換えられ

$$\pi = 1 - z' - z'_{660} + \chi (T' - T'_{660}) \quad (3.79)$$

となる．

3.2.5 レオロジー方程式

粘性率は構成方程式 (3.14) のように歪み速度と応力の関係の比例係数として定義される。しかし、岩石ではひずみ速度が応力に比例しない非線形 (非ニュートン) 流体の場合も多い。例えば、転移クリープが起きる場合には、歪み速度は応力の 3 乗に比例する。歪み速度が応力のべき乗に比例する流体はべき乗則流体と言われ、2 次元以上の場合、その関係は

$$\varepsilon_{ij} = a\tau^{n-1}\tau_{ij} \quad (3.80)$$

と表すことが出来る (本節の式は次元を持つ)。 $n=1$ の時はニュートン流体を表す。 a は比例定数である。ここで、 τ は応力および歪み速度テンソルの第二不変量

$$\tau = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (3.81)$$

である。非圧縮流体の場合は差応力の $1/2$ となっている。このような場合にも、歪み速度と応力の係数として、

$$\tau_{ij} = 2\eta\varepsilon_{ij} \quad (3.82)$$

から (実効) 粘性率が定義できる。ただし、粘性率は応力あるいは歪み速度に依存する関数

$$\eta = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} = a^{-1}\tau^{1-n} \quad (3.83)$$

で表される。

温度・圧力・応力依存性を持つ粘性率の式は、

$$\eta = B\tau^{1-n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{RT}\right] = B^{1/n}\varepsilon^{(1-n)/n} \exp\left[\frac{E^* + pV^*}{nRT}\right] \quad (3.84)$$

と表される。かんらん石では n は 3 から 4 程度である。ただし、 ε は歪み速度テンソルの第二不変量である。

指数を平均温度のまわりで線形化すると、

$$\eta = A \exp[-bT + cz] \quad (3.85)$$

となる。ただし、 b は温度の逆数の次元を持つ数、 c は長さの逆数の次元を持つ数である。マントルでは平均温度からのずれが大きいため、この式の近似はあまり良くない。ところが、この式は簡単なので、対流の基礎的な性質を探るシミュレーションにおいてしばしば用いられる。無次元の値は式 (3.82) を基準粘性率で割ることにより得られる。

3.2.6 2次元の場合の運動方程式

2次元非圧縮性流体の場合には流線関数

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (3.86)$$

を導入することにより、圧力項を消去することが出来る。運動方程式の回転を取り、(3.81)を代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\eta \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\eta \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.87)$$

となる。無次元では、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left[\eta' \left(\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z'^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \left(\eta' \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x' \partial z'} \right) = Ra \frac{\partial T^{*'}}{\partial x'} \quad (3.88)$$

となる。ただし、ここでは熱浮力のみが取り入れられている。この式は一般化重調和方程式 (generalized biharmonic equation) とよばれる。重調和方程式は数値的な取り扱いが難しい。そのため、粘性率一定の時には渦度

$$\omega = (\nabla \times \mathbf{u})_j = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.89)$$

を用いて、2つの調和方程式

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial z'^2} = Ra \frac{\partial T^{*'}}{\partial x'} \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z'^2} = \omega' \quad (3.91)$$

に分けて扱う方が容易である。

3.2.7 まとめ

多くの式を導入したので、ここでは熱対流の場合について式をまとめておく。本節から先は、特に断らない限りダッシュが無い変数でも無次元量を表す。

マントル対流を記述する無次元量

レイリー数 (浮力による応力の粘性応力に対する強さ)

$$Ra = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T g h^3}{\eta \kappa} \quad (3.58)$$

散逸数 (圧縮性が温度場への影響する強さ, 散逸の影響の強さ)

$$Di = \frac{\alpha g h}{C_p} \quad (3.55)$$

熱力学的グリユナイゼンパラメータ (熱膨張と圧縮率の比)

$$\gamma = \frac{\alpha K_s}{\rho C_p} = \frac{\alpha K_T}{\rho C_s} \quad (3.56)$$

非弾性近似

弾性波を切り離す近似

連続の式

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0 \quad (3.51)$$

状態方程式 (平均密度)

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \frac{Di}{\gamma} \quad (3.52)$$

運動方程式 (密度変化の状態方程式を含む)

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} \right] - \frac{2}{3} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) + \bar{\rho} \beta \frac{C_p}{C_v} \frac{Di}{\gamma} p^* - \bar{\rho} \alpha Ra T^* \quad (3.57)$$

エネルギー方程式

$$\bar{\rho} C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \text{Div}(T + T_0) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{Di}{Ra} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} H \quad (3.59)$$

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (3.16)'$$

拡張ブジネスク近似 ($Di/\gamma = 0$ とする近似)

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.58)$$

運動方程式 (状態方程式を含む)

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} \right] - \alpha Ra T^* + P_{660} Ra \Gamma_{660} + CRa \Gamma_c \quad (3.59)$$

エネルギー方程式

$$\frac{DT}{Dt} - \alpha \text{Div}(T + T_0) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{Di}{Ra} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{H}{C_p} \quad (3.60)$$

ブジネスク近似 ($Di = 0$ とする近似)

連続の式・運動方程式 (状態方程式を含む)

拡張ブジネスク近似と同じである。

エネルギー方程式

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{H}{C_p} \quad (3.64)$$

第4章 マントル対流の理論的扱い

4.1 マントル対流の解析的理論

マントル対流を記述する方程式は非線形であるので、解析的な解を得られるのは対流の振幅が小さい場合と、有限振幅のごく限られた場合である。有限振幅の対流理論には、非線形性の程度によって、弱非線形理論と強非線形理論に分けられる。ここでは無限小振幅理論と強非線形理論である境界層理論 (Turcotte and Oxburg, 1967) を取り上げる。

4.1.1 無限小振幅理論－対流の開始

対流が起こるためには2つの条件が必要である。1つは、流体の垂直温度勾配が断熱温度勾配よりも大きいこと、もう1つは浮力が粘性抵抗よりも大きいことである。マントルでは、地殻熱流量の観測から、温度勾配が断熱温度勾配よりも大きいことが知られている。そのため、重要なのは後者の条件である (一方、大気のように粘性が小さい場合は前者が重要である)。レイリー数は熱浮力と粘性抵抗力の比であったことを思い出すと、レイリー数が臨界値 (臨界レイリー数) を越えたときに対流が起きると予想される。臨界レイリー数以下では対流が起きずに熱伝導状態に止まる。ここでは最も簡単な、図4.1に示すような温度差1の平行平板間の粘性流体における対流の始まりを考える。ただし、断熱温度勾配の効果を取り除いたブジネスク近似を考え、さらに、上下面での力学的境界条件はマントルと同様に自由滑り面とする。

温度及び流線関数は熱伝導状態 $T_0, \Psi_0 (=0)$ からの小さなずれを T', Ψ' として、

$$T = T_0 + T' \quad (4.1)$$

$$\Psi = \Psi' \quad (4.2)$$

とする。ブジネスク近似における運動方程式、エネルギー方程式は、

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi') = \nabla^4 \Psi' + Ra \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \nabla^2 T' \quad (4.4)$$

と書くことができる。運動方程式は圧力を消去し、流線関数で表したものである。対流の開始は中立の条件を求めればよいので、時間微分項を0とおいた式、

$$0 = \nabla^4 \Psi' + Ra_{Cr} \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$-\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \nabla^2 T' \quad (4.6)$$

を解けばよい。 Ra_{cr} は臨界レイリー数である。これらの式に Pr が含まれないことから、対流開始の条件は Pr に依存しないことが分かる。温度一定、自由滑り境界条件を満たす解として、

$$\Psi' = \Psi_1 \sin(\pi z) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (4.7)$$

$$T' = T_1 \sin(\pi z) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (4.8)$$

と置くことができる（ T_1 と Ψ_1 は定数である）。ここで λ は対流セルの波長である。これらを式(4.5), (4.6)へ代入すると、

$$\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right)^2 \Psi_1 + \frac{2\pi}{\lambda} Ra_{cr} T_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right) T_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \Psi_1 = 0 \quad (4.10)$$

これらが自明でない解を持つ条件から、臨界レイリー数は、

$$Ra_{cr} = \frac{\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \pi^2\right)^3}{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}} \quad (4.11)$$

と求められる（図4.2）。最小の Ra_{cr} となるのは

$$\lambda = 2\sqrt{2} \quad (4.12)$$

のときである。つまり、アスペクト比1対 $\sqrt{2}$ のセルが発達しやすいことを示している。このとき Ra_{cr} は

$$Ra_{cr} = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 657.5 \quad (4.13)$$

である。 Ra_{cr} は境界条件によって変化するが、だいたい 10^3 オーダーの値をとる。

マントル対流のレイリー数は少なく見積もっても 10^6 以上であるから、マントルが対流してい

るのは確実である。

4.1.2 境界層モデル

ここでは、温度差を持つ2つの板に挟まれた粘性などの物性値一定の流体の運動について考える。レイリー数は十分に高く対流が活発に起きているとする。流体が上昇(下降)し上(下)の境界にぶつかると、上下に移動出来ないで、この部分では熱が伝導により輸送される。対流によって効率よく運ばれた熱を逃がすため、境界の部分には温度勾配の急な層が形成される。これを熱境界層(thermal boundary layer)と呼ぶ(図4.3)。対流は熱境界層が境界から離れて上昇・下降することにより駆動される。垂直な熱境界層は3次元的な柱状構造を持つ場合にはブルームと呼ばれる(マントルダイナミクスではしばしば高温熱境界層のことを指す)。境界層に囲まれた領域では、対流の速度が大きいので、熱伝導により運ばれる熱が少ないので、断熱状態に近く、温度はほぼ断熱温度勾配を持つ。 Di が0に近い(ブジネスク近似が成立する)場合には、温度はほぼ一定で、等温核(isothermal core)と呼ばれる。レイリー数が高い対流では、熱伝導で熱を運ぶ距離が系の大きさに比べて非常に短いため、非常に薄い熱境界層が形成される。

上下面の温度差のみで対流が駆動される場合には、対流は図4.3のように対称的な構造を持つ。対流は内部熱源 H のみに加熱される場合でも起きる。これは、上面で流体が冷やされて境界層が形成されるからである。密度の高い流体が上面付近に出来、これが沈降することによって対流が駆動される。この場合には、温度場、速度場ともに非対称的な構造を持つ(図4.4)。実際の地球は両者の中間である。

4.1.3 境界層の温度構造

定常的な対流の熱境界層の温度場について考える。ここでは、ブジネスク近似が成り立っているとする。また、内部加熱の効果も無視することにする。定常的な対流を考え、時間微分項を0とおく。

境界層の部分では、水平の温度勾配が小さいので、

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.14)$$

と近似して良いであろう。ここで κ は熱拡散率である。なお、本節の式は次元を持つ。速度は運動方程式から求めなければならないが、簡単のため u は一定としよう。つまりプレートのような運動を考える。ここで、(4.13)は観測者が停止した空間から見た場合で、温度場は空間分布を持つが時間的には変化しない。一方、観測者がプレートとともに運動している場合には、マントル物質が、熱いマントルの湧き出し口(海嶺)で上がって、上面から徐々に冷やされるように見える。これを式で表すには、(3.64)式で水平速度を0と置けばよい。すなわち、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.15)$$

となる．つまり，境界層の温度は1次元の熱伝導方程式で記述できる．この式を上面が低温を持つ

$$T(z=0) = T_0 \quad (4.16)$$

$$T(z=-\infty) = T_M \quad (4.17)$$

という境界条件で解けばよい．ここで， T_M はマンツルの等温核の温度である．ただし，マンツルは境界層より十分厚いので，モデルは深さが無限大までとした．このことから，このモデルはプレートの半無限大冷却 (half-space cooling model) モデルと呼ばれる．式(4.15)は

$$\zeta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (4.18)$$

と置いて変数変換し，積分すると (Turcotte and Schubert, 1982を参照せよ) 解が得られる．すなわち，解は

$$T = T_0 + (T_M - T_0) \operatorname{erfc} \left[\frac{-z}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \quad (4.19)$$

となる．空間分布は時間を $t=x/u$ で置き換えればよい． erfc は相補誤差関数， erf は誤差関数

$$\operatorname{erfc}[x] = 1 - \operatorname{erf}[x] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-\xi^2] d\xi \quad (4.20)$$

であり，この積分は無限大までの積分を除いて解析的に求めることが出来ない．差分法により求めた解を図4.5に示す．また，地表の熱流量は温度を微分すると

$$q = -k \frac{dT}{dz} = \frac{k(T_M - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa t}} \quad (4.21)$$

と求められる (図4.6)．なお， $T = 0.9(T_M - T_0)$ までの深さを境界層の厚さと考えると，境界層の厚さ δ は

$$\delta = 2 \operatorname{erfc}^{-1}[0.1] \sqrt{\kappa t} = 2.32 \sqrt{\kappa t} \quad (4.22)$$

と求められる．時間を $t=x/u$ で置き換えると， δ は速度の2乗に反比例することが分かる．

境界層モデルはマントル対流とプレート運動が定性的にも定量的にも同じ物であることを示した点で重要である。

4.1.4 断熱温度勾配

次に境界層で囲まれる領域の温度分布を求めよう。この領域は断熱温度勾配をもつ。断熱温度勾配は標高の高い場所では気温が低いことで実感できる。比エントロピー (単位体積あたりのエントロピー) s の変化を温度 T と圧力 p の2つの状態変数を用いて表すと、

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (4.23)$$

と表される。なお、本節の式は次元を持つ。断熱状態の時、すなわち、 $ds = 0$ の時には(4.23)より、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T / \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (4.24)$$

となる。定積比熱の定義

$$C_p \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (4.25)$$

より、

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T} \quad (4.26)$$

が成り立つ。一方、マックスウェルの相反定理より、

$$- \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (4.27)$$

であり、熱膨張率の定義

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4.28)$$

を考慮すると,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\alpha V = \alpha \rho \quad (4.29)$$

である. 式(4.26), (4.29)を(4.24)に代入すると,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\alpha T}{\rho C_p} \quad (4.30)$$

が得られる. さらに静水圧の条件(z軸は上向きが正になっている)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4.31)$$

を考慮すると,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\alpha T g}{C_p} \quad (4.32)$$

が得られる. これが断熱温度勾配である. 無次元化をすると,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = -\alpha' Di(T + T_0) \quad (4.33)$$

となる. エネルギー方程式で対流項と断熱温度勾配項以外を0に置き, z方向の速度だけを考慮すると,

$$w \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha' Di w (T + T_0) = 0 \quad (4.34)$$

である. この式は, 当然であるが断熱温度勾配の式と同じになっている. ブジネスク近似が成り立つときにはDiは0であり, 温度は一定となる.

問題: マントルの断熱温度勾配を求めよ. マントルのポテンシャル温度(マントル物質がそのまま地表にあがってきたとする)を1280 として, 核・マントル境界での温度を求めよ.

4.1.5 境界層モデルの次元解析

次に対流の熱輸送効率を次元解析で見積もってみよう．ここでは，次元解析により図4.3のような温度差のある2次元の平板間の対流を考える．簡単のため，ブジネスク近似が成立する場合を考える．等温核内部では渦度方程式は

$$\nabla^2 \omega = 0 \quad (4.35)$$

となる．ただし，渦度境界条件は垂直熱境界層での渦度方程式

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \approx Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.36)$$

から決まる．熱境界層が非常に薄いので，速度場は対流全域にわたりこの渦度から決定されると近似して良い．エネルギー方程式は，例えば上面の熱境界層に対し，

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.37)$$

のように近似できる．これらを解くには，何らかの近似が必要となる．まず，次元解析によりオーダーを見積もってみよう．ここで，熱境界層の厚さを d ，対流の波長を λ と置く．式(4.36)は，

$$\frac{\omega}{\delta^2} \sim Ra \frac{1}{\delta} \quad (4.38)$$

となる．式(4.37)は，

$$u \frac{\Delta T}{\lambda} \sim \frac{\Delta T}{\delta^2} \quad (4.39)$$

である(ただし，無次元化されているので $\Delta T=1$ である)．ここで，渦度は(無次元化されているので， $h=1$ である)

$$\omega \sim u/(h) \quad (4.40)$$

であるので， u を消去すると，

$$\delta \sim \lambda^{1/3} Ra^{-1/3} \quad (4.41)$$

となる．つまり境界層の厚さはレイリー数の $1/3$ 乗に反比例する．地表の熱流量は境界層の厚さに反比例するので，レイリー数の $1/3$ 乗に比例する．一方， δ を消去すると，

$$u \sim \lambda^{-1/3} Ra^{2/3} \quad (4.42)$$

が得られる．すなわち速度はレイリー数の2/3乗に比例する．

4.1.6 有限振幅理論 – 境界層理論

もう少し定量的に調べるため，Turcotte and Schubert (1981) に従って速度場と温度場を近似して解析を行ってみよう．なお，精密な議論はOlson (1987) や Jimenez and Zufiria (1987) にある．

温度差のみによって対流が駆動される場合には2つの熱境界層が形成され，対称的な構造を持つ (図4.3)．このときの速度場を

$$u = u_0 (1 - 2z) \quad (4.43)$$

$$w = -w_0 \left(1 - \frac{4x}{\lambda} \right) \quad (4.44)$$

と近似する． u_0 と w_0 の関係は質量保存から

$$\frac{w_0 \lambda}{2} = u_0 \quad (4.45)$$

である．水平および垂直熱境界層がそれぞれ一定の速度 (u_0, w_0) で運動していると仮定すると，温度場は，水平熱境界層で，

$$T = T_c \operatorname{erfc} \left[\frac{-z}{2} \left(\frac{u_0}{\lambda} \right)^{1/2} \right] \quad (4.46)$$

垂直熱境界層では，

$$T = T_c \operatorname{erfc} \left[\frac{w_0}{2u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) \left(\frac{u_0}{\lambda} \right)^{1/2} \right] \quad (4.47)$$

となる．ただし， erfc は相補誤差関数 ($1 - \operatorname{erf}$) である．ここで T_c は等温核の温度 ($1/2$) である．

対流は主として垂直熱境界層の浮力によって駆動されている．垂直熱境界層半分に対して，温度場を積分すると全浮力 F_b は，

$$F_b = 2RaT_c \frac{u_0}{w_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2} \quad (4.48)$$

となる．この浮力がする仕事率と，等温核での粘性応力による仕事率が等しいことから，

$$2F_b w_0 = 2\tau_v w_0 + 2\frac{\lambda}{2}\tau_h u_0 \quad (4.49)$$

が成り立つ．ここで τ_v と τ_h はそれぞれ垂直，水平熱境界層に働く応力

$$\tau_v = \frac{4w_0}{\lambda} \quad (4.50)$$

$$\tau_h = 2u_0 \quad (4.51)$$

である．これらを代入して整理すると水平速度 u_0 は

$$u_0 = \frac{(\lambda/2)^{7/3}}{(1+\lambda^4/16)} \left(\frac{RaT_c}{\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} = \frac{(\lambda/2)^{7/3}}{(1+\lambda^4/16)} \left(\frac{Ra}{2\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} \quad (4.52)$$

である．このとき地表の熱流量 Q は，

$$Q = \frac{1}{\pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2)^{5/3}}{(1+\lambda^4/16)^{1/3}} (RaT_c)^{1/3} = \frac{1}{2^{1/3} \pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2)^{5/3}}{(1+\lambda^4/16)^{1/3}} Ra^{1/3} \quad (4.53)$$

となる．熱輸送の効率を表すパラメーターとしてヌッセルト数 Nu を導入する．ヌッセルト数は対流と熱伝導を合わせた全熱輸送量の熱伝導のみによる熱輸送量 q_k (無次元化しているためここでは $q_k=1$) に対する比で定義される．すなわち

$$Nu = \frac{Q}{q_k \lambda / 2} = \frac{1}{2\delta_h} \quad (4.54)$$

である．水平境界層の平均的厚さ δ_h はヌッセルト数の逆数に比例する． u_0 を代入すると Nu と Ra の関係

$$Nu = \frac{1}{2^{1/3} \pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2)^{2/3}}{(1+\lambda^4/16)^{1/3}} Ra^{1/3} \quad (4.55)$$

が得られる．アスペクト比1 ($\lambda/2=1$) のとき Nu は最大値

$$u_0 = 0.271 Ra^{1/3} \quad (4.56)$$

$$Nu = 0.294 Ra^{1/3} \quad (4.57)$$

となる．このときには対流が定常的になる．式(4.57)の値は数値計算から得られた値(図4.5)

$$Nu = 0.26Ra^{0.32} \quad (4.58)$$

よりも少し大きめに求められている(図4.7)．

対流が内部加熱のみに駆動される場合には，上面のみに境界層が形成され，これが沈降することにより対流が引き起こされる．そのため，速度場が広い上昇域と細い下降域に分かれる(McKenzie et al., 1974)．速度場を図4.4のように近似すると，質量保存から速度の関係は

$$w_u \left(\frac{\lambda}{2} - \delta_v \right) = \frac{1}{2} w_0 \delta_v = \frac{1}{2} u_0 \quad (4.59)$$

である．Turcotte and Schubert(1981)では上下対称的な速度場を与えているが，これは誤りである．垂直熱境界層の温度場は

$$T = T_c \operatorname{erfc} \left[\frac{w_0}{2u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) (2w_u)^{1/2} \right] \quad (4.60)$$

と書くことができる． T_c は熱輸送のバランスから決まる．垂直熱境界層の全浮力は

$$F_b = 2RaT_c \frac{u_0}{w_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi w_u} \right)^{1/2} \quad (4.61)$$

である．下部加熱の場合と同様に仕事率の釣り合い

$$F_b w_0 = \tau_v w_0 + 2 \frac{\lambda}{2} \tau_h u_0 \quad (4.62)$$

を考える．さらに，定常状態における内部加熱 H と熱流量の釣り合い

$$H \frac{\lambda}{2} = 2T_c \left(\frac{2w_u}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{T_c}{\delta_h} \frac{\lambda}{2} \quad (4.63)$$

を考慮すると，

$$RaH \frac{\lambda}{2} = \frac{w_0^2}{\delta_v} \left(\frac{\lambda}{2} - \delta_v \right) \quad (4.64)$$

が得られる．一方，エネルギー方程式より，

$$w_u T_c \left(\frac{\lambda}{2} - \delta_v \right) = \frac{T_c \lambda}{\delta_h 2} \quad (4.65)$$

が成り立つ．ここで δ_v と δ_h はほぼ等しいと考え，式(4.60), (4.64), (4.65)から速度を消去すると，

$$\delta_v \approx \delta_h \approx 2^{1/5} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/5} Ra_H^{-1/5} \quad (4.65)$$

が得られる．ここで， Ra_H は内部加熱によるレイリー数，

$$Ra_H = RaH = \frac{\rho_0 \alpha g h^5 H}{\eta_0 \kappa k} \quad (4.66)$$

である（最右辺のパラメータは次元を持つ）．速度場は

$$w_0 = 2^{-2/5} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{3/5} Ra_H^{2/5} \quad (4.67)$$

と求められる．等温核の温度は

$$T_c = 2^{1/5} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/5} HRa_H^{-1/5} \quad (4.68)$$

となる．つまり等温核の温度は対流が激しいほど低くなる． Nu は(4.54)より境界層の厚さの逆数と定義すると，

$$Nu = 2^{-1/5} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{-1/5} Ra_H^{1/5} \quad (4.69)$$

となる．内部加熱のある場合，レイリー数が高くなると境界層不安定が起こりアスペクト比は一定しない(1.5.2参照)．アスペクト比1 ($\lambda = 2$) のときは，

$$T_c = 1.15 Ra_H^{-1/5} \quad (4.70)$$

$$Nu = 0.871 Ra_H^{1/5} \quad (4.71)$$

と求められる．数値計算によると， $Ra_H=10^6$ においてアスペクト比1の対流が安定して起こった．このとき， $Nu=10$ (4.3.2参照)と求められ，ほぼ一致している．Turcotte and Schubert(1981)によると，

実験の結果では

$$T_c = 5.95 Ra_H^{-0.23} \quad (4.72)$$

と求められている。ただし底面の境界条件が固着境界(速度0)である。

上で得られた結果にマンツルの平均的物性値を用いると、マンツル対流の速さは年間3 cm程度、境界層の厚さは80 km程度と求められる。ただし、 $Ra_H = 3 \times 10^8$, $\lambda = 2$ とした。また、マンツルの温度は1200 K程度と求められる。おおざっぱな見積もりではあるが、温度を除き実際のマンツルに近い値が得られている。温度を一致させるには地球の冷却の効果を考える必要がある。

4.2 マントル対流の数値シミュレーション

4.2.1 マントル対流の数値計算法

マントル対流は支配方程式が非線形であるので、数値シミュレーションが理論的解析における主役である。マントル対流数値シミュレーションは数値流体力学の特別な場合の1つということができる。

マントル対流数値シミュレーションで用いられる手法は有限要素法 (finite element method, FEM) と有限差分法 (finite difference method, FDM) に大別される。ただし、有限体積法 (finite volume method, FVM) は有限差分法と考え方は異なるが、同様な式に帰着する。マントル内部の粘性率変化を考えるとこの2つ方法が汎用性のある解法である。

数値流体力学としての特徴はマントルの粘性率にある。粘性率が高いため、運動方程式が密度分布に対する定常流速場の式になっていることである。このことを考慮すると、マントル対流の数値解法は以下ようになる。(1) 与えられた温度場および組成から、密度を計算する。(2) 密度場と釣り合う速度場決める。(3) 速度場を利用して次の時間ステップにおける温度場を計算する。(4) (1)に戻る。

マントル対流の数値計算において困難が伴うところは2点である。1点目は運動方程式である。まず、運動方程式について定常解を各時間ステップごとに求めなければいけないので計算に時間がかかる。また、粘性率が何桁も変化するので数値不安定や収束性の悪さの原因になる。2点目は移流方程式である。拡散のない移流方程式 (3.68) を解くのは一般に難しい。特にマントル対流のようなゆっくりと流れる流体が何度も攪拌され、流体粒子が大きく変形するような問題に対する有効な解法はいまのところない。

4.2.2 差分法によるマントル対流の数値計算

差分法による解法を紹介する。ここでは熱対流のみを考える。問題の次元と粘性率により、3通りの場合に分けて考える。

図4.8 に差分法で用いるメッシュの構造を示す。一様な正方形メッシュを用いる。下付添字 i, j, l, J はメッシュ上での位置を表す。さらに上付添字 n は時間ステップを表す。

(1) 2次元粘性率一定の場合

渦度で表した運動方程式 (3.88), (3.89) を用いるのが簡単である。渦度方程式を差分化すると、

$$\begin{aligned} & (\omega_{i,j-1} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j+1} - 4\omega_{i,j}) / \delta x^2 \\ & = Ra (T_{l+1,J} - T_{l,J} + T_{l+1,j+1} - T_{l,j+1}) / 2\delta x \end{aligned} \quad (4.73)$$

と表される。この式を逐次過緩和法 (successive over relaxation method, SOR法) や前処理付き共役勾配法 (Preconditioned Conjugate Gradient method, PCG法) などを使って解く。工

エネルギー方程式は差分化すると，

$$\begin{aligned}
 & (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) / \delta t \\
 & + (\langle uT \rangle_{i,j}^* - \langle uT \rangle_{i-1,j}^*) / \delta x + (\langle wT \rangle_{i,j}^* - \langle wT \rangle_{i,j-1}^*) / \delta z \\
 & = (T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - T_{i,j+1} + 4T_{i,j}) / \delta x^2 + H
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

と表される．ただし，移流項は風上法などを使って安定化させる必要がある．例えば，

$$\langle uT \rangle_{i,j}^* = [u_{i,j}^n (T_{i+1,j}^* + T_{i,j}^*) - |u_{i,j}^n| (T_{i+1,j}^* - T_{i,j}^*)] / 2 \tag{4.74}$$

のようになる．時間微分項以外の T に付いた $*$ を n とすると陽解法， $n+1$ とすると陰解法になる．

(2) 2次元粘性率変化のある場合

流線関数で表した運動方程式 (3.86) を用いる．差分化した式は

$$\begin{aligned}
 & [\eta_{i,j-1} \Psi_{i,j-2} + (4\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1} - \eta_{i-1,j}) \Psi_{i-1,j-1} \\
 & - 4(\eta_{i,j} + \eta_{i+1,j}) \Psi_{i,j-1} + (4\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j-1} - \eta_{i+1,j}) \Psi_{i+1,j-1} \\
 & + \eta_{i-1,j} \Psi_{i-2,j} - 4(\eta_{i,j} + \eta_{i,j+1}) \Psi_{i-1,j} \\
 & + \{4(\eta_{i,j} + \eta_{i,j+1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i+1,j+1}) + \eta_{i,j-1} + \eta_{i-1,j} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1}\} \Psi_{i,j} \\
 & - 4(\eta_{i+1,j} + \eta_{i+1,j+1}) \Psi_{i+1,j} + \eta_{i+1,j} \Psi_{i+2,j} \\
 & + (4\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i-1,j} - \eta_{i,j+1}) \Psi_{i-1,j+1} + -4(\eta_{i,j+1} + \eta_{i+1,j+1}) \Psi_{i,j+1} \\
 & + (4\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i+1,j} - \eta_{i,j+1}) \Psi_{i+1,j+1} + \eta_{i,j+1} \Psi_{i,j+2}] / \delta x^4 \\
 & = Ra(T_{i+1,j} - T_{i,j} + T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1}) / 2\delta x
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

である．この式の係数行列は反復法に対して安定でないので，直接法，すなわちガウスの消去法 (Gaussian elimination method)，ここでは特に対称行列なので改訂コレスキー分解法 (Modified Cholesky decomposition method) を用いる．

(3) 3次元の場合

3次元の場合は，原始変数 (u, v, w, p) の式をそのまま解く方法が一般に用いられる．数値流体力学では，様々な方法が原始変数に基づく運動方程式の解法として開発されている．定常速度場を求めるので，陰解法であることが必要である．例えばSIMPLER (Semi-IMPlicit Pressure-Linked Equations, Revised) 法が用いられる．最近は連続の式と運動方程式を直接カップリングさせて解く方法も用いられている．連立1次方程式の解法として，3次元では元数があまりに大きくなるので直接法は用いられず，反復法が用いられる．

3次元の数値計算では結果の可視化法も重要である．等値面表示や，温度などのスカ

ラ－場を半透明カラーに表すボリュームレンダリング法などがよく用いられている (3次元対流の計算例を参照のこと) .

4.3 マントル対流の数値モデルと基本的性質

ここでは、数値計算から得られたマントル対流の基礎的性質について述べる。ここでの議論から、マントル対流の性質を調べるということは、境界層の振る舞いを調べることであるということが、次第に明らかになることであろう。

4.3.1 粘性率一定下部加熱モデルとレイリー数の変化

マントル対流のもっとも基本的なモデルは、粘性率その他の物性値一定、内部加熱なしの場合である。さらに、圧縮性を無視したブジネスク近似を用いる。この場合は、系を支配するパラメータがレイリー数のみとなる。なお、一部のモデルを除き2次元箱型モデルを用い、力学的境界条件は全てについて自由すべりである。図4.9にレイリー数 10^4 、 10^5 、 10^6 、 10^7 の場合の結果を示す。対流系内部の温度場は、温度が急激に変化する熱境界層（図中の影をつけた部分）と、温度が一定の等温核からなる。駆動力を生じる密度差は熱境界層だけに存在している。それに対し、流速場は対流系全体にわたり変化する。これは熱拡散率に比べて粘性率が非常に大きいことによる。レイリー数が上がるに従って、熱境界層が薄くなり、等温核の面積が増大する（図4.10a,b）。またこの場合、解は上下対称である。

粘性率一定、内部加熱を持たない対流では熱境界層の厚さとレイリー数の間の相似関係

$$\delta \sim (RaT_c)^{-1/3} \sim Ra^{-1/3} \quad (4.92)$$

がレイリー数によらず成立する。したがって境界層不安定を起こさない対流パターンはレイリー数によらず安定である。境界層が常に不安定を起こすほど厚くなる前に沈み込むので、アスペクト比（縦横比）1の対流は高いレイリー数でも定常解が安定である。

アスペクト比を大きくすると、初期条件によっては時間依存解を持つ（図4.11）。時間依存は、長波長の流れにより厚くなった熱境界層が不安定を起こすことにより生じる。

4.3.2 内部加熱の影響

マントルは底面（核）だけでなく内部にも熱源を持つ。内部加熱源はマントルの平均温度を上昇させる（図4.12）。すなわち、下部加熱だけのモデルにあった対称性が破れる。このことにより、熱境界層の相似則（4.76）が成り立たなくなる。そのため、熱境界層不安定が起こり、レイリー数が低くアスペクト比が小さい対流でも時間依存性を持つ。

一様な内部熱源だけ場合でも、上部から冷却されることにより対流を起こす。つまり、上面付近に熱境界層が形成されるので、これがマントル中に沈降することによって流れが引き起こされる（図4.13）。

4.3.3 圧縮性の影響

マントル内部の高い圧力により、マントル物質は圧縮性を持つ。対流への圧縮性の影響の強さを表すパラメータは散逸数 Di である。全マントルでは0.3から0.5程度と見積もられる (表2)。これは、圧縮性の影響は重大ではないが、無視できない程度の影響を持つということを表している。

Di を変化させた場合の粘性率一定の対流を図4.14 に示す。ブジネスク近似 ($Di = 0$) の時は等温核の部分は温度勾配が0である。圧縮性がある場合、等温核に当たる部分の温度勾配はほぼ断熱温度勾配となる。 Di が大きくなるほど、温度勾配が大きくなることが分かる (図4.15)。この場合、断熱温度からの温度のずれが小さくなるので、実効レイリー数が小さくなっている。また、断熱温度勾配項は絶対温度に比例するので (式 (4.32))、低温域よりも高温域に対して効果が大きいの。そのため、上昇流が弱くなり、下降流が強くなるという非対称性を生じる。

なお、散逸数という名前はエネルギー方程式の散逸項に Di がかかっていることから名付けられている。また、相転移の潜熱項にも現れる。このことから、圧縮性の温度場への影響を無視する場合には、これらの項を同時に0にしなければ整合的ではない。

4.3.4 粘性率の温度依存性の影響

マントルの粘性率が温度・圧力・応力によって変化することは、マントル対流の最大の特徴である。その中でも温度依存性はもっとも強い。図4.16 に粘性率の温度依存性を考慮した対流の計算例を示す。粘性率の温度依存性のみを考慮した対流は以下のような特色を持つ。冷たい上部熱境界層は粘性率が高くなり、動きが非常に遅くなる。そのため、上部の熱境界層は厚くなり (影をつけた部分)、熱流量が低くなる。一方、熱い下部熱境界層は粘性率が低いために熱境界層が薄くなる。そのため、熱流量の釣り合いにより、上部の熱境界層の温度差が増大し、等温核の温度が上昇する (図4.17)。この傾向は温度依存性が強くなると大きくなる。粘性率のコントラストが 10^3 程度のときには、表層は遅いながらも、ゆっくり流動する。このとき、計算領域のアスペクト比が大きければ、波長の長い対流セルが発達する (Davies, 1988; Tackley, 1993)。これは表面の境界層の粘性が高く不安定を起こしにくいからである。粘性率の変化が 10^4 を越えたあたりから、上面の高粘性層が流速がほとんど0の不動蓋 (stagnant lid) となり、マントル内部は表面と独立して運動するようになる (Ogawa et al. 1992, Tackley, 1993; Solomatov and Moresi, 1997)。このとき、表層と独立した固定境界のように振る舞うので対流の波長は小さくなる。

4.3.5 粘性率の圧力依存性の影響

粘性率の圧力依存性があると深さとともに粘性率が増加する。図4.18 に粘性率の温

度依存性を考慮した対流の計算例を示す．粘性率の深さ依存性がある場合には，温度依存性のみの場合とは逆にマントル深部で流速が遅くなる．熱境界層の厚さも，下部の方が熱くなり，温度差も増加する．逆に上部の熱境界層は薄く，温度差が小さくなる．その分，平均温度が低下する．また，粘性率の圧力依存性は，対流の水平スケールを大きくする働きがある．

4.3.6 粘性率の応力依存性 (非線形レオロジー) の影響

粘性率の式 (3.84) から，非線形レオロジーの場合には応力あるいはひずみ速度が大きくなると粘性率が小さくなるのがわかる．従って，応力が大きくなるような場所に变形が集中し，变形がより局所的に起きる．

図4.19 に粘性率が温度・応力依存を持つ対流の一例を示す．堅い粘性層の角で応力の集中が起こり，粘性率が減少している．そのため，温度依存性のみを持つ対流では高粘性の層がほとんど動かなかったのに対して，応力依存性がある場合には高粘性の層が動くようになる (図4.20)．しかも，变形が角の部分に集中して，そのほかの部分ではあまり变形が起こらないという状態になる．このことから，応力依存性は地球のプレート運動のような变形様式を説明するのに重要な要素であると考えられる．

もう一つ応力依存性の重要な働きは，粘性率の温度・圧力依存性の影響を小さくすることである (Christensen, 1984)．粘性率の式をひずみ速度で書いた場合，指数関数の括弧の中が $1/n$ になる．これは，マントル内部をひずみで見える場合，温度・圧力の変化を応力を一定と見る場合の $1/n$ としたことに相当する．粘性率をひずみ速度の平均値によって決まると考えると，平均的な粘性率は

$$\eta = B' \exp \left[\frac{3}{n+2} \frac{E^* + pV^*}{RT} \right] \quad (4.92)$$

となる．実際，この式を使うと非線形流体の対流パターンを線形流体で近似的に再現できる (Christensen, 1984)．ただし，高粘性の層が表面に出来るときには，堅い境界層の振る舞い方が重要になるので，あまり良い近似ではなくなる．

4.3.7 3次元対流

2次元のモデルは，マントルの複雑な性質の影響調べるときに計算量を減らすための手段である．現実にはレイリー数が低い (10^4 程度) ときには2次元ロール状対流も安定であるが，それ以上高いレイリー数のとき対流は3次元的な構造をもつ．3次元箱型モデルによる計算例を図4.21に示す．熱境界層と等温核とからなる構造は同じであるが，熱境界層は3次元的な柱状の構造を持っている．このような構造をプルームという．

3次元対流は流体力学の問題として，理論および実験により対流パターンの安定性が調べられてきた (Whitehead and Parsons, 1978; Frick et al., 1983)．対流のパターンは，レイ

リー数が高くなるにつれ，(1) 2次元ロール状，(2) バイモーダル，(3) 3次元スポーク (不規則)，と変化する．境界条件によっては3次元六角形，3次元四角形のパターンも存在する．

3次元対流が数値計算の問題として取り上げられるようになったのは最近である．始めは2次元の時と同様，粘性率一定を仮定していたが (例えば，Travis et al., 1993; Houseman, 1988) 粘性率が変化する場合も調べられるようになった (Christensen and Hardar, 1991; Ogawa, 1991; Tackley, 1996)．温度依存性の強さを変えたときの対流パターンの変化は3次元でも2次元 (4.3.2) と共通な特徴が見られる．また，圧力依存性についても2次元と同様，対流の波長を大きくする効果が見られる (Yuen et al., 1994)．

3次元の対流の問題で，最大の課題はプレート運動の再現である．特に，トランスフォーム断層，すなわち，トロイダル速度場 (垂直方向の渦度) 形成のメカニズムを調べることが課題である．べき乗則ではトロイダル成分の発生は少ない (Christensen and Hardar, 1991)．最近では，もっと強い非線形性の応力依存性を取り入れた対流の問題も計算されるようになってきた (5.1.1)．

4.3.8 球殻内の対流

地球は球であり，マントル対流も球殻内の対流として扱わなければならないというのは言うまでもないことであろう．曲率の効果の他，マントルのように厚い球殻では深部に行くほど表面積が小さくなる効果が無視できない．球殻モデルの簡単なものは軸対称を仮定した2次元モデルである．2次元軸対称球殻モデルでもこれらの効果はある程度予測することができ，ヌッセルト数の見積もりなどには有効である．しかし，3次元の球殻モデルの自然さが損なわれてしまう．

3次元球殻でのマントル対流は最近ようやく現実的課題となってきた問題である．はじめに粘性率一定の対流のパターンが調べられた (Bercovici et al., 1988)．それによると，球殻内の対流では上昇流がブルーム状，下降流が上昇流を囲むシート状となることが示された．このようなパターンは内部加熱の全体の熱に占める割合が90%程度になるまで現れる (Bercovici et al., 1988)．定常解では正四面体の面の中心にブルームが位置する正四面体パターンと正六面体パターンの2つのパターンが安定である (図4.22)．また，水平方向に平均した温度は上面と下面の面積の違いから上下非対称になる．定常状態を考えた場合，上下面の熱流量は釣り合わねばならない．一方，境界層の厚さは上下面でほぼ同じになる．そのため，熱流量は下面の面積が小さい分，温度差で稼がなくてはならない．そのため，下面にはより大きな温度差の熱境界層を生じる (図4.23)．

粘性率が変化する場合は，温度依存性 (Ratcriff et al, 1996; Iwase, 1997; Ratcriff et al., 1997) および圧力依存性 (Bunge et al., 1997) の対流パターンへの影響が調べられた程度である．粘性率コントラストの変化は3次元箱形の場合とほとんど同じような影響を持つ．非線形レオロジーを持つ3次元球殻対流の計算は今後の課題である．

4.3.9 相境界の影響

マントル鉱物はマントル遷移層において相転移を起こす(第2章)。相転移は温度に依存するので、横方向の密度変化を作りだし、対流パターンに影響を与える。相転移が対流に影響を与えるメカニズムを図4.22に表す。ここでは、上下マントル境界のポストスピネル相転移のような負のクラペイロンスロープを持つ相境界を考えている。下降流の場合、冷たい境界層が相転移面に横切ろうとすると、境界層内部の高圧相(高密度)への相転移はマントルの平均温度での深さよりも深くで起こる。同じ深さで低圧相(低密度)である低温部分には正の浮力を生じる。上昇流ではちょうど逆に、負の浮力が働く。従って、負のクラペイロンスロープを持つ相境界は流れを妨げ、マントル対流の層構造を作り出す可能性がある。逆にオリビン-スピネル転移のように正のクラペイロンスロープを持つ相境界は流れを強くする作用を持つ。一方、相転移に伴う潜熱は密度変化と逆の効果を持つ(しかし、密度変化の方が重要な役割を持つ)。負のクラペイロンスロープを持つ相境界は上昇流を暖め、下降流を冷やす。

相転移の影響の強さは、無次元化したクラペイロンスロープと密度差比の積、相境界浮力パラメータ

$$P_{660} = \chi' \frac{\Delta\rho_{660}}{\rho_0\alpha\Delta T} \quad (4.94)$$

で表される(Christensen and Yuen, 1985)。 P が負で絶対値が大きい(つまり密度差が大きく、クラペイロンスロープの傾きが大きい)ほど相転移の影響は強い。図4.23は P を変化させた時の対流パターンの変化である。 P が急なモデル(上)では対流が二つの層に、緩いモデルでは一つの層になっている。マントル対流理論では、前者を二層対流、後者を一層対流あるいは全マントル対流と呼ぶ。

二層対流において、2つの対流層の結合様式として、熱的結合および力学的結合が考えられる。熱的結合は、上下の層の温度分布が結合する場合である。上部マントルが冷たい下降流なら、下部マントルも冷たい下降流である。この場合、上下の対流の境界には大きな剪断変形が起こる。一方、力学的結合は二層の対流の境界で流れが粘性的に結合する場合である。上部マントルが冷たい下降流なら、下部マントルは熱い上昇流になる。この場合、上下の対流の境界の剪断変形は小さい。実際の対流は図24のように両方の特色を持つ。

他にも、負のクラペイロンスロープを持つ相転移はマントル対流の層構造に対して以下のような効果を持つことが分かっている。(1)レイリー数が大きいほど、相転移の効果が大きい(図4.22)。これは、レイリー数が高いと、境界層がより薄いために相境界の浮力にうち勝つことが出来ないためである。あるいは、レイリー数が高いということを粘性が小さく変形しやすいと説明することもできる。(2)二層対流と一層対流の中間的な状態が存在し、そこでは相転移面が間欠的に破れる対流が起きる(図4.24)。相転移面の間欠的破れは急激に起きるので、フラッシングイベント(flushing event)あるいはマントルなだれ(mantle avalanche)と呼ばれる(Honda et al., 1993; Tackley et al, 1993)。ただし、

3次元の対流では局所的に相転移面の破れが起きる比較的静穏なものとなる。(3) 相転移に伴う潜熱の効果は重要でない。(4) 相境界は対流の水平スケールを大きくする作用を持つ (Tackley, 1996)。

最近では、現在のマントル対流の層構造の問題においてマントル遷移層の相境界はそれほど重要な役割を果たしていないと考えられることが多くなった (5.1.4)。しかし、スラブの変形や深発地震の成因に関する問題ではマントル構成鉱物の相変化が重要であるとされる。また、レイリー数の高かった過去のマントルにおいて相境界が重要である可能性が残っている (Steinbach et al., 1993)。

4.3.10 化学境界

化学境界も相境界と同様に対流の層構造の原因となる。その影響の強さはその密度差のみに依存し、化学境界浮力パラメーター C (式(3.71)) で表される (Richter and McKenzie, 1981)。 C が約1以下の時は混合型対流が起こる。混合型対流では、軽い層と重い層の温度差が大きくなり密度差が逆転すると2つの層の逆転が起こり効果的に混合する。各層個々のレイリー数が臨界レイリー数を越える場合は層内に常に対流が存在し、二層の混合が連続的に起こる。二つの層を合わせたレイリー数は臨界レイリー数を越えるが各層のレイリー数が臨界レイリー数以下の時には、密度逆転が起きたときのみ対流運動が起こる。これは過安定対流 (Over stable convection) と呼ばれる。 C が1よりも大きいときには二層対流となる。二層対流の場合でも、粘性引き込みによる二層間の混合が起こる。

第5章 マントルの熱物質循環

いままで、数多くのシミュレーションにより、マントル対流が持つであろういろいろな性質が示されてきた。個々の観測事実についての詳しい解説とその解釈は次章で描かれる。ここでは主にシミュレーションの結果を元にして、観測を参照しながらマントル対流の構造および熱輸送について考察する。

5.1 マントル対流数値モデルとマントルダイナミクス

5.1.1 マントル対流とプレートテクトニクス

プレートテクトニクスは地球型惑星の中で地球だけに起きていて、地球上の様々な地学的特徴を作り出している。従って、マントル対流のモデリングにおいて、プレート運動を再現し、その成因を調べることは最も重要な目標の1つとなっている。マントル対流理論によると、地表付近のマントルには熱境界層が形成される。その1つの運動様式がプレートテクトニクスとして地表に現れているということになる。

プレート運動は以下のような特徴を持つ。(1) プレート境界近傍以外でのプレートはほぼ剛体的に振る舞い、プレート境界へ変形が集中している。(2) プレートの沈み込みが起き、その構造が非対称である(片方のプレートのみ沈み込む)。(3) トランスフォーム断層が存在する。(4) 地質時代の長期にわたってプレート運動が安定して起きている。(5) プレートが海洋プレートと大陸プレートの2つに分かれる。これらの性質は粘性率一定のような簡単なマントルのものとは異なる。境界層の振る舞いはその力学的性質により決まるはずである。従って、数値シミュレーションでは、レオロジーや物質的不均質を考慮した場合には境界層の挙動がプレート運動の性質に近づくかどうか調べる。その第一歩が粘性率の応力依存性の導入であることは(4.3.6)で述べたとおりである。

マントルの岩石は低温において複雑な力学的性質を持ち、そのレオロジーは強い非線形性を有する。最近のレオロジーの実験的研究によると、プレートは力学的に3層構造を持つことが分かった。プレート上部には脆性的にふるまう部分(普通プレートに対してイメージしている弾性や破壊などの性質を示す)、その下に最も強度が高い塑性的にふるまう部分、さらに最下部には粘性流動により変形する部分とが形成される。

このような力学的特性は完全に定量的に明らかになったわけではないが、プレートの中で最も強度が高い塑性変形の部分に注目したシミュレーションが最近精力的に行われている。塑性変形は一般に降伏応力を持つ流体としてモデル化されている(Cserepes, 1981)。この場合、粘性率は応力が降伏応力以下の場合には一般的な粘性率の式(例えば式(3.84))に従うが、降伏応力 σ_Y に達すると実効粘性率は

$$\eta = \frac{\sigma_y}{2\varepsilon} \quad (5.1)$$

と表される．これは，脆性破壊や塑性変形のようなある応力に達すると急激に変形が進むということを粘性流体として表したものである．降伏応力を取り入れると，プレート的な運動を実現することができる (Moresi and Solomatov, 1998; Tackley, 2000)．しかし，地球のように長時間にわたる安定したプレート運動を起こすには降伏応力の微調節が必要である．降伏応力が大きい場合には，プレートが厚く成長するまで沈み込みが起こらず，地表の運動は長い間ほとんど停止している．厚くなったプレートが重力不安定を起こすとプレートは急激にマントル中へ崩落し，急速な地表の更新が起こる．このとき，プレートの更新は全表面にも及ぶ．このとき形成されたプレートは薄いので，沈み込みを起こすことが出来ずに再びプレートは停止する．このようなテクトニクスの様式は金星表面で起きていると考えられ，金星の全球表面更新モデル (Global resurfacing model) と呼ばれる．このモデルはクレーター分布から求められた金星地表の年代を説明する．一方，降伏応力が小さい場合には地表の安定した運動を起こすことが可能だが，可能な降伏応力の範囲は狭く，またレオロジー実験から得られた値と比べてかなり小さい．

このことは，より現実的なプレートの性質を考慮することが必要であることを意味するのかもしれない．例えば大陸プレートの存在や，プレート間の滑りに対する水の影響などである．プレート境界に関しては，断層すべりをモデルに取り入れたモデルや (Zhong and Gurnis, 1995)，間隙流体やガウジ層の影響を取り込むためレオロジーに履歴を持つ層としてモデル化することが考えられている (Honda et al., 2000; Tackley, 2000)．降伏応力の履歴を考慮したときの2次元数値シミュレーションの例を図5.1，図5.2に示す．片側沈み込み，表面のほぼ一様な速度やプレート境界における速度の急激な変化などが実現されている．

プレートテクトニクスの成因そのもの以外にも以下のようなマントルダイナミクスの問題と関連がある．(1) アセノスフェアで起きていると考えられている小スケール対流の問題．プレート直下にはプレート運動方向に伸びたロール状対流が存在し，海底の深度異常の原因と考えられている．これは，熱境界層 (プレート) が粘性的に振る舞う部分の不安定により形成される二次的対流セルと考えられる．(2) 沈み込むプレートとマントル遷移層との相互作用の問題．これは，対流の層構造や深発地震の問題と関わっている．(3) 沈み込みがマントルの構造に与える影響．これはマントルの大規模構造と関係する問題である．プレートは，マントル対流の波長を長くする作用を持つ (Davies, 1988)．これにより，マントル内部の構造はプレートの沈み込みの位置を強く反映したものになるはずである．実際，地震波トモグラフィーで得られた高速度異常域のパターンは，パンゲア分裂以降の沈み込み口の位置の時間的変遷をよく反映しているように見える．

5.1.2 大陸プレートの影響

地震波高速度異常が観測されることから，大陸地殻下には厚いプレート (テクトスフェ

ア)が存在すると考えられている。大陸プレートは沈み込まないことから、マントル対流からある程度独立した境界層であると考えることが出来る。そのような厚い境界層は温度勾配が小さく、伝導による熱輸送を妨げる蓋として働く。そのため大陸下のマントルには熱がたまり、マントル上部に大陸から海洋方向に流れを生じ、その結果大陸下に大規模な上昇流が発生する。2次元数値シミュレーションの一例を図5.3に示す。3次元の場合でも熱遮蔽効果によるプルームの発生が起きることが示されている。

このような上昇流の発生は大陸分裂の原動力あるいはきっかけとなると考えられている。パンゲアの中心であったアフリカ大陸の下に地震波低速度域が観測されることなどを考えると、この解釈は正しいように見える。また、ウィルソンサイクルのように振動的振る舞いをすることも説明できる。熱遮蔽効果が大陸分裂の原因になりうるのか明らかにするために、以下2つの点を調べる必要がある。1つは、プルームが大陸分裂の原動力になり得るかということである。もう1つは、大陸が移動する場合にも熱遮蔽効果が働くか否かを明らかにすることである。今までの数値シミュレーションでは大陸は固定されていて動かないモデルを用いているものが多い。これらの点を明らかにするためには、プレート運動が起こるモデルによりシミュレーションを行うことが必要である。

5.1.3 ホットスポットとマントルプルーム

ホットスポット火山はプレート内部に孤立した火山である。プレート運動があるにもかかわらず、その位置はほとんど動かないことが特徴である。このことから、ホットスポットはマントル深部に起源を持つと考えられてきた。

ホットスポットはマントルプルームがその原因と考えられている。マントルプルームは対流系下部の熱境界層が起源とする煙突状の上昇流である。粘性率の温度依存性を持つ静止した流体を下部から熱したときに起きる不安定のようなものを図5.4に示す。プルームの先端に非常に大きな高温領域ができる。これをプルームヘッド(plume head)と呼ぶ。プルームヘッドの下には細く、粘性率の低い管状の高温域が続く。これをプルームテイル(plume tail)と呼ぶ。プルームが形成され上昇を始めると、ヘッドを成長させる。ヘッドが成長すると浮力が大きくなるので、プルームはより速い速度で上昇する。ヘッドの成長は、高温物質の供給が追いつかなくなったところで止まる。プルームヘッドが地表にぶつかると、それは洪水玄武岩の起源になると考えられている。ヘッドの温度が周囲と同化し、テイルの部分だけが残っているものがホットスポットであるとのシナリオでは考える。これに対し、マッケンジーらは定常的なプルームを考え、プルームの上にあるプレートが伸長し薄くなったときに洪水玄武岩の噴火が起きるとした。

プルームの起源となる熱境界層が660km境界にあるのか、核・マントル境界(あるいはその近傍)にあるのか今でも意見が分かれている。ホットスポットがほとんど動かないので、核・マントル境界ではないかと考えるのは自然である。下部マントルで粘性率が高く、水平方向の対流速度が遅ければ、プルームの位置はあまり動かないはずである。ホットスポットスウェル(ホットスポット付近の海底の広範囲な盛り上がり)から見積もられるプルームの熱輸送量と、地球磁場から推定される核の熱放出量が一致することも

その証拠だと考えられている。数値モデリングの立場から見ると、地球が冷却して行く過程において核の熱容量でもプルームの十分な熱源となりうるのか調べる必要がある。また、対流が連続的に起きている場で「静止しているように見える」プルームが可能であるのかまだ詳しく調べられていない。

プルームの存在は理論的、および地質学的要請により強く信じられているが、地震波トモグラフィーからプルームと直接関係づけられる構造が見つかったわけではない。ホットスポットの大きさが非常に小さいことから、プルームが小さいためにトモグラフィーがプルーム一つ一つを分解できていないという解釈が一般的である。これはマントル粘性率の非常に強い温度依存性によってプルームが非常に細いと考えれば説明がつく。地震波トモグラフィーによると下部マントル深部に長波長の低速度異常が見ついている。これがプルームそのものを表していると考えられることもあるが、一般に受け入れられている高いレイリー数の対流ではこのような大きさの温度異常は生じない。速度異常の原因を温度異常と考える場合でも、トモグラフィーのデータは平均からの異常を表すので、低速度域が必ずしも高温熱境界層であると限らないことに注意する必要がある。また、地震波速度異常は組成の違いという解釈もあり得る (Kellog et al, 1998)。この考えでは、マントル深部に鉄にとむ始原的物質からなる層、あるいはリサイクルした地殻を多量に含む層が存在し、これが対流の粘性引きずりによりかき集められて山のように盛り上がったものが低速度域であると説明する。低速度物質の山は海洋島玄武岩中のより不親和性元素に富む特徴や始原的物質が起源と考えられる同位体 (^3He) を説明できる。また、放射性元素に富むのでプルームの熱源となり、プルームは、この山と周りのマントルとの境界に出来た熱境界層から発生すると考える。このモデルは、熱史モデルの放射性元素の不足分も説明できる可能性がある (5.2.3)。

5.1.4 マントル対流の層構造

マントル対流の層構造は地球科学における様々な関わりを持ち、その最も重要な課題の1つであると言える。マントル対流の層構造は、下部マントルの組成に対して制約条件を与えるという点でも重要である。すなわち、マントルが一層対流 (全マントル対流) であるとする、上下マントルの組成が異なるという可能性が非常に小さくなる。

数値シミュレーションの結果に物性実験から得られた相転移のパラメータを当てはめると、マントルは一層対流と二層対流の間から一層対流が起こる条件にあることが分かる。数値シミュレーションは示しているもう1つの大事な点は一層対流と二層対流の境ははっきりしたものではなく、いくつかの中間的な対流様式を取りうることである (Christensen and Yuen, 1984; Nakakuki et al., 1994)。例えばマントルなだれもその1つである。また、上下マントルで組成による密度差 (1 から2%) がある時でも、スラブが下部マントルに沈み込んで行くような状態が可能である (しかし、対流による混合を考えるとこのようなモデルは排除できるのかもしれない)。この場合、スラブやプルームのレオロジーが対流様式を決める重要な働きを持つ。これらの結果を踏まえながら、データ

を解釈することが重要である。

マンツルの層構造に関するデータや議論を表3にまとめた。一部を除き、全マンツル対流の方が自然にデータを説明できる。この中でも全マンツル対流を強く示唆しているデータは地震波トモグラフィとマンツルの粘性構造である。トモグラフィによると、スラブは西太平洋の一部地域を除いて下部マンツルの高速異常と連続していることが分かってきた。これは一層対流あるいは熱的結合二層対流と解釈できる。しかし、熱的結合二層対流は沈み込み帯のジオイド正異常と調和的でない。また、二層対流は対流層の境界に熱境界層を形成する。そのため、660km境界に少なくとも数100Kの温度差を伴うことになり、下部マンツルの温度は融解温度に近くなる。これは、下部マンツルの粘性率の大きな低下を引き起こし、観測と反する。ただし、全マンツル対流でも、ジオイドを説明するためには下部マンツルでの粘性率の増加が必要である。上下マンツル境界において粘性率が増加するモデルは他にも、最深発地震のメカニズムや、ホットスポットの運動と調和的である。下部マンツルトモグラフィのパターンも沈み込み帯の位置の時間的変遷で説明することができる。

このように、現在の上下マンツル境界は対流をほとんど妨げていないと考えられる。しかし、下部マンツル深部（1300～2000 km 以深）に化学的な成層構造あるいは地域的な大規模不均質構造が存在する可能性はまだ残っている (5.1.3, 5.2.3)。

5.2 マントル対流と地球の熱史

地球内部は一般に冷却の途上にあると考えられている。その理由は地球形成期における重力エネルギーの解放により初期地球は高温であったと推定されていること、そして、過去にさかのぼるほどマントルが内部加熱源の放射性元素を大量に持つこと、という2つである。マントル対流論における問題は、(1) マントル対流を駆動する熱源とその量(地球のユレー比:後述)、(2) 対流による熱輸送量の変化、という2つ課題を明らかにすることである。(1)は地球の形成期における元素の分配やダイナモの原動力に関わりを持つ問題である。(2)は過去の対流パターンや、テクトニクスと関わりを持つ。

5.2.1 パラメータ化対流論による地球の熱史モデル

地球内部の熱あるいは物質の流れを議論する場合、地球がいくつかの熱溜あるいはリザーバーからなっていると考えると、その熱あるいは物質収支のみを考えると最も簡単なモデルができる。このようなモデルをボックス・モデルと呼ぶ(図5.5)。

地球内部を熱輸送という観点から見ると、対流の性質から大陸地殻、マントル(海洋地殻含む)を、核の3つの部分に分けられる。マントル対流が層を成している場合にはマントルはさらに2つの部分に分けることができる。大陸地殻は放射性元素が濃集して地球全体の約2割程度の熱源を持つ。現在の地球のように地殻の形成速度が遅い場合にはマントルとは別に扱うことができる。以下の議論では大陸地殻を取り除いたマントル、核の2つの部分から地球が構成されるとして問題を扱う。

マントルおよび核の熱収支はそれぞれ、

$$M_{man} C_{man} \frac{dT_{man}}{dt} = H_{man} - Q_{sur} + Q_{CMB} \quad (5.2)$$

$$M_{core} C_{core} \frac{dT_{core}}{dt} = H_{core} - Q_{CMB} \quad (5.3)$$

と表すことができる。なお、本章の式は次元を持つ。ただし、ここでの温度はポテンシャル温度(断熱圧縮による温度の上昇を差し引いた温度)を表す。+が熱が加わることを示し、-は熱が出ていくことを示す。記号の説明と代表的な値を表4に示す。式(5.2)、(5.3)は時間を逆方向に解くことが可能である。従って、現在の温度、熱流量、内部加熱量を初期条件にして、過去の温度を計算することができる。

H はマントル、及び核が内部に持っている熱源である。マントルは放射性同位体の崩壊による熱

$$H_{man} = M_{man} \sum_i C_i H_i \exp[\lambda_i(t-t_E)] \quad (5.3)$$

を持つ (t_E は地球の年齢である)．各パラメータの意味と値は表5にある．現在における地表の熱流量のうち，内部加熱源が占める割合をユーレイ (Urey) 比と呼び (Christensen, 1985)，パラメーター化対流モデルを特徴づける1つのパラメータである．核には放射性元素はないと考えられるが，内核の形成に伴う潜熱と重力エネルギーの解放による熱の効果がこの項に含まれる．

ボックス間の熱流量はマントル・核システムではマントル対流が決めている．これは，マントルと核の粘性率が何桁も異なるため，マントル対流の熱輸送が核の対流よりも非常にゆっくりしているためである．熱流量は対流のダイナミクスに依存するが，パラメータ対流論ではレイリー数から簡単な関係で決まると仮定する．粘性率一定，定常状態の時と同様にヌッセルト数とレイリー数の関係

$$Nu = aRa^\beta \quad (5.4)$$

が成り立つと仮定する (a は比例定数)．さらに， Ra および Nu の決めかたが問題になるが，多く研究では， Nu および Ra は境界層において局所的に決定されるという考え方を取り入れている (Honda, 1996)．この考え方に従い，局所レイリー数 Ra_l ，局所ヌッセルト数 Nu_l を導入する．地表の境界層に対して，局所レイリー数 Ra_{sur} は

$$Ra_{sur} = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T_{sur} g h^3}{\eta \kappa} \quad (5.5)$$

と計算される． Q_{sur} は

$$Q_{sur} = F_{sur} S_{sur} \quad (5.6)$$

$$F_{sur} = Nu_{sur} f_{sur} \quad (5.7)$$

と表される． f は熱伝導による熱流量で，境界層の温度差 ΔT_{sur} により計算する．すなわち，

$$f_{sur} = k \frac{\Delta T_{sur}}{h} \quad (5.8)$$

とする． a は計算された熱流量と現在の熱流量と合わせるように決める．核・マントル境界については同様に ΔT_{CMB} を使うと Ra_{CMB} ， Nu_{CMB} が計算できる． Nu と Ra の関係 (式 (3.71)) がそれぞれの境界層で独立に決まると考えて良いかは動力学的モデルにより検証する必要がある．

マントル対流のダイナミクスの影響は β および Ra を計算する際の粘性率に押しつけられている． β は主にマントルの冷却速度と粘性率変化との結合強度を表す．また，マントルの平均粘性率の取り方は境界層の運動を決めているメカニズムによって変わる．

パラメータ化対流モデルの計算を図5.6に示す．この計算では，現在を終端境界条件として時間について逆方向に解いている． β が0の場合と，0.3の場合の2通り計算している．ユーレイ比をパラメータとして変化させて解を求める．温度がマンツルの融解温度などと比べてもっともらしくなるようにユーレイ比を決める．この計算や今までの研究から，以下のようなことが分かる．

(1) 地球の冷却速度． β が0.3程度の場合地球のユーレイ比は大きくなければならない．そのため冷却速度は 50K Gy^{-1} 程度である． $\beta=0.3$ のモデルにおいて，ユーレイ比のわずかな変化でも地球初期の温度が大きく変化するのは，現在の温度から，その時代の温度場を推定できないことを意味する．逆に，地球初期においてどのような温度であっても，現在は同じような温度になることを意味する．一方 β がゼロの時にはユーレイ比は比較的小さいモデルが適当である．この場合には地球の冷却速度は大きく $100 \sim 150\text{K Gy}^{-1}$ 程度にもなる．

(2) マンツル対流の層構造．二層対流を仮定すると非常に大きな熱境界層が上下マンツル境界にできる (Spohn and Schubert, 1981; Honda, 1995)．この場合はユーレイ比が大きい場合だけがありそうなモデルである (Honda, 1995)．ユーレイ比を小さくすると上下マンツル境界の熱境界層はより大きくなる．さらに，下部マンツルは内部加熱源の元素も含まれる不適合元素 (incompatible element) に不足していると考えた方がつじつまが合う (Spohn and Schubert, 1981)．従って，全マンツル対流の方が熱史モデルと調和的である．

5.2.2 地球の熱史の動力学的モデル

最近，動力学的モデルによる熱史計算はスーパーコンピューターの演算性能の向上により現実的な研究テーマになってきた．パラメータ化対流論の正当性を検証するためには，動力学的モデルによるパラメータ化の検証が必要である．熱史の動力学的モデルは非定常状態下で粘性が変化する境界層の振る舞いを調べることに他ならない．

(1) 地表のテクトニクスと β の値．前に述べたようにマンツルの冷却速度は β に依存する． β は境界層の厚さ，すなわち，プレートの速度 (正確にはプレート拡大速度と拡大軸総延長の積)がマンツルの粘性率に依存する強さである．実際のマンツルのように複雑なレオロジーを持つ対流で， β の値をいくつにとればよいのかという問題がある (Christensen, 1985; Gurnis, 1989)．粘性率の温度依存性だけを考慮した場合には β は0.1以下になる．応力依存性も考慮したシミュレーションの結果によると β を0.3程度にとった方が良い (Nakakuki, 1997; Moresi and Solomatov, 1998)．ところで，プレート運動は古地磁気データや，海洋性地殻の年代測定により推定できる可能性があるという点でも重要である．データを定量的に解釈するため，沈み込まない大陸プレートを考慮したシミュレーションが必要である．

(2) 核・マンツル境界における熱輸送と局所レイリー数の非対称性．核・マンツル境界では，熱輸送を支配するメカニズムはブルームの生成による境界層の更新であると広く信じられている (Davies, 1993)．しかし， Ra_{sur} が Ra_{CMB} よりも大きい場合 (例えば ΔT_{CMB} が小さいとき)，核・マンツル境界の熱輸送がプレートに沈み込みによって引き起こされ

る冷たいマンツルの流れ (mantle wind) による境界層の更新に支配される可能性がある。従って、粘性率の温度依存性を持つ動力学的モデルを用いて、核・マンツル境界の支配的な熱輸送メカニズムはどちらなのか調べる必要がある。

5.2.3 熱史モデルとデータとの整合性

現在のマンツルに対する情報に比べて、過去のマンツルに対する情報は非常に乏しい。しかし、乏しいながらも、温度変化、プレート速度の変化、海水順変動に関する情報が得られている。

温度を直接反映する岩石学のデータを見るとマンツルはゆっくり (50 K Gyr^{-1}) 冷却してきたようである。これは、ユーレイ比が比較的大きく (0.6から0.8)、 β も大きいモデルと調和的である。大きなユーレイ比はコンドライト隕石に含まれている放射性元素の量と調和的だが、地球化学的に推測されている上部マンツルの放射性元素の量 (ユーレイ比が0.4から0.5) と調和的ではない。この場合には、熱源を多く有している層が必要である。下部マンツル内部に前節で述べたような化学的成層構造があるとする、その候補になりうるかもしれない (Kellog et al., 1999)。

660km境界の相転移により、過去のレイリー数が高かったマンツルでは二層対流が起きていたと考えられることがある。しかし、二層対流から全マンツル対流への遷移は急激に上部マンツルの温度を増加させる (Steinbach et al., 1993)。これは、大規模な火山活動を伴うだろう。しかし、それを示唆する証拠は今のところない。それが本当だとすると、地球は過去も全マンツル対流であったか、二層対流から全マンツル対流への遷移がかなり時間をかけてゆっくり起こったかのどちらかであろう。

大陸の古地磁気学データから得られたプレート速度に関する情報は、むしろプレート速度はあまり変化していないことを示している。ただし、2点注意する必要がある。1つは、古地磁気データは大陸の移動速度を示すことである。現在でもプレートの速度は、大陸が存在するか否かで大きく変わっているから (インド・オセアニアプレートを例外とする)、得られた値は冷却を担う海洋プレートの平均的速度を表していない可能性がある。2つ目は、冷却の速さはプレート速度だけでなく、拡大軸の総延長、言い換えるとプレートの平均的な大きさにも依存することである。海洋地殻が生成されてから付加するまでの時間を年代測定から決定することができれば、どちらのユーレイ比を持つモデルが正しいか判定することができるはずである。