

問題の答え

問題 1-2

$$\bar{a} = \frac{\dot{S}_{ocean}}{\dot{S}_{ocean}}$$

より, 57.1 [Ma]

問題 1-3

$$d_{sedi} = \frac{\rho_{cont} V_{cont}}{\rho_{sedi} \dot{S}_{sub} t_{sub}}$$

より, 878 [m]

問題 1-4

$$v_{open} = \frac{\dot{S}_{OC}}{L_{ridge}}$$

より, 3.5 [cm/yr]

問題 1-5

$$v_{sub} = \frac{\dot{S}_{OC}}{L_{trench}}$$

より, 7.0 [cm/yr]

問題 1-6

$$F_{SP} = g \sin \theta_{slab} \Delta \rho_{slab} l_{slab} d_{slab}$$

より, パラメータを代入すると, 3.9×10^{13} [N m⁻¹]

問題 1-7

$$F_{RP} = g \rho_m \alpha (T_m - T_0) \left[1 + \frac{2}{\pi} \frac{\rho_m \alpha (T_m - T_0)}{\rho_m - \rho_w} \right] \kappa t$$

にパラメータを代入すると, 4.2×10^{12} [N m⁻¹]

問題 2-2・2-3

弾性体の方程式

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \Theta + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$$

の発散と回転をとると、それぞれ、体積膨張率と変位の回転の波動方程式となる。波動方程式より

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

問題 2-4

弾性体の構成方程式

$$T_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

において

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$$

$$T_{22} = T_{33} = 0$$

とすると

$$0 = \lambda\varepsilon_{11} + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{22}$$

となる。ポワッソン比の定義

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$$

と比較すると、

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$\lambda = \mu$ とすると $V_p = \sqrt{3}V_s$, $\nu = 0.25$ となる点について注意。

問題 3-2

$$\tau_m = \frac{\eta}{\mu}$$

より、316.9 [yr]。つまりマントルは地質学的時間で流体としてふるまう。

問題 3-3

問題 3-2 と同様に、 $3.169 \times 10^3 \sim 3.169 \times 10^5$ [yr]

問題 3-4

大陸地殻とマンツルの圧力の釣り合いより

$$\rho_c H_c = \rho_m (H_c - h)$$

よって

$$h = \frac{(\rho_m - \rho_c) H_c}{\rho_m}$$

密度と大陸地殻の厚さの値を代入すると 5.3030 [km]。

問題 3-5

大陸地殻と海洋底の海水・海洋地殻・マンツルの圧力の釣り合いより

$$\rho_c H_c = \rho_w d_w + \rho_o H_o + \rho_m (H_c - h - d_w - H_o)$$

このとき、大陸の平均標高は、

$$h = \frac{(\rho_m - \rho_c) H_c - (\rho_m - \rho_w) d_w - (\rho_m - \rho_o) H_o}{\rho_m}$$

と表される。だいたい、 $h = 2$ [km]程度となる。実際の大陸の平均標高は 0.8 [km]である。

問題 3-6

熱膨張率 α を用いると、プレートが冷却することによる密度の増加は海底面からの深さ z とプレート年代 t の関数として

$$\Delta\rho_{plate} = \rho_M \alpha (T_M - T(z, t))$$

密度が増加することにより、単位面積あたりの荷重が増加する。上式に重力加速度 g を $z = 0 \sim \infty$ まで積分したものが荷重の増加の合計である。よって、荷重の増加は

$$\Delta P_{plate} = g \int_0^{\infty} \Delta\rho_{plate} dz = g \rho_M \alpha \int_0^{\infty} (T_M - T(z, t)) dz$$

と表される。これに半無限体冷却モデルの温度

$$T(z, t) = T_M + (T_0 - T_M) \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{2\sqrt{kt}} \right]$$

を代入して、積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \Delta P_{plate} &= g \rho_M \alpha \int_0^{\infty} \left[T_M - T_M - (T_0 - T_M) \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{2\sqrt{kt}} \right] \right] dz \\ &= g \rho_M \alpha (T_M - T_0) \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{2\sqrt{kt}} \right] dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g\rho_M\alpha(T_M - T_0)\int_0^\infty \operatorname{erfc}[z']2\sqrt{\kappa t} dz' \\
&= 2g\rho_M\alpha(T_M - T_0)\sqrt{\kappa t}\int_0^\infty \operatorname{erfc}[z'] dz' \\
&= 2g\rho_M\alpha(T_M - T_0)\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\int_0^\infty \operatorname{erfc}[x] dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

を使用した。一方、海底が沈降すると、アセノスフェアが海水で置き換わることにより加重が減少する。その量は、水深の増分を d' とすると、

$$\Delta P_{Topo} = -(\rho_M - \rho_W)gd'$$

と表される。アイソスタシーが成立するということは、これが、プレートの冷却による荷重の増加と合わせてゼロになるということである。よって、

$$-(\rho_M - \rho_W)gd' + 2g\rho_M\alpha(T_M - T_0)\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} = 0$$

より、

$$d' = \frac{2\rho_M\alpha(T_M - T_0)}{\rho_M - \rho_W}\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

となる。水深は、これに中央海嶺の深さ d_r を足したものである。

問題 4-4

発熱量の式にスライドの表のパイロライトの値を代入する。

$$5.09 \times 10^{-12} [\text{W kg}^{-1}]$$

問題 4-5

$k=0$ のとき、熱伝導方程式は

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \rho H$$

とかける。よって、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{H}{C_p}$$

dt/dt を求めて 10 億年をかけると $\Delta T=133.9$ [K]。1 億年では 13.3 [K]。

問題 4-6

フーリエの法則

$$q = k \left| \frac{dT}{dz} \right|$$

より dt/dz を求めると 24.2 [K km⁻¹]。

問題 4-7

断熱温度勾配は

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\alpha g T}{C_p}$$

で表される。ここで温度 T は絶対温度であることに注意せよ。 T について解くと、

$$T = T_0 \exp \left[\frac{\alpha g z}{C_p} \right]$$

で表される。この式に値を代入して、

$$T = 1573 \exp[2.45 \times 10^{-4} z]$$

を得る。これをグラフにプロットする。深さ z の単位は[km]。

地表での断熱温度勾配は 0.385 [K km⁻¹]と見積もられ、0.3 [K km⁻¹]より少し大きめの値である。

注意

- ・記号が何を意味するのかは考えてみてください。
- ・問題 2-2～2-4 は弾性論を勉強していないとできない問題なので、今は理解できなくてもよいです。