

1 数値計算の基礎と地球惑星科学への応用

2 3 I. フーリエ級数の基礎と計算

4 表計算ソフトウェアを用いて三角関数の重ね合わせから周期関数が作られるのを再現
5 する。

6 7 1. フーリエ級数

8 9 1.1 フーリエ級数

10 周期関数

$$11 \quad f(t+T) = f(t)$$

12 をいろいろな周期($T, T/2, T/3, \dots$)の \sin 関数の重ね合わせにより表す.

$$13 \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + a_3 \cos \frac{6\pi t}{T} + \dots$$
$$14 \quad \quad \quad + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + b_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + \dots \quad (1.1)$$

$$15 \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (1.2)$$

16 このとき、その級数をフーリエ級数と呼ぶ.

17 $f(t)$ が偶関数の場合、 \cos だけの級数で表され、余弦級数と呼ばれる。また、奇関数の
18 場合、 \sin だけの級数で表され、正弦級数と呼ばれる。

19 20 1.2 フーリエ係数

21 フーリエ級数の係数をフーリエ係数と呼ぶ。フーリエ係数は積分

$$22 \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (1.3)$$

$$23 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n x}{T} dt \quad (1.4)$$

24 より求められる。フーリエ係数は元の物理量と同じ次元を持つ。

25 26 1.3 矩形波のフーリエ級数

27 周期が 2π の関数 $f(x)=1 (0<x<\pi), f(x)=-1 (-\pi<x<0)$ をフーリエ級数で表わす. この関数は奇
28 関数であるので, 余弦の係数

29
$$a_n = 0 \tag{1.5}$$

30 である. 正弦の係数は, n が奇数の時

31
$$b_n = \frac{4}{n\pi} \tag{1.6}$$

32 偶数の時は

33
$$b_n = 0 \tag{1.7}$$

34 となる.

35

36

37 2. Microsoft Excel で sine のグラフを作成する

38

39 2.1 Excel とは

40 (1) 表計算ソフト

41 実験データなどの数値を表に並べて縦横位置を利用して系統的な計算をする

42 (2) 数学関数や統計関数などデータ処理に便利な機能がある

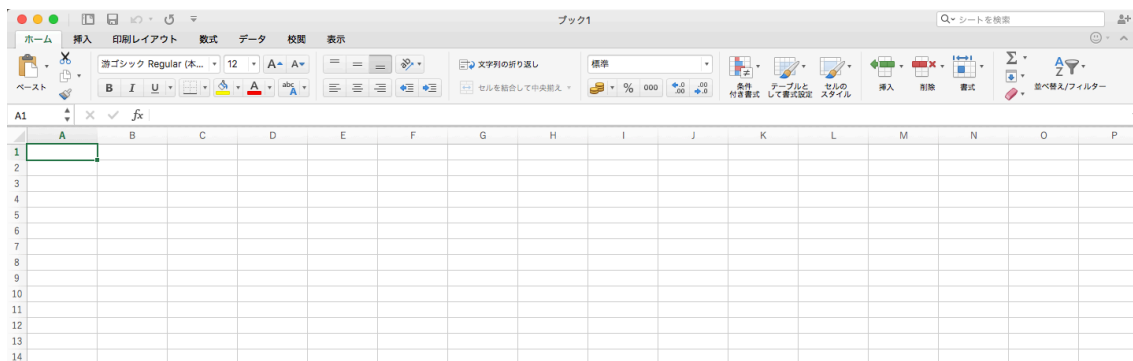
43 (3) グラフを書くことができる

44

45 2.2 Excel の基本

46 (1) Excel を起動したときの画面

47 図は Microsoft Excel 2016 for Mac の画面



48

49 (2) 緑枠で示された数字を入れるところをセルと呼ぶ。

50 (3) セルの位置はコラム・行のアルファベット+番号で表される。図は A1

51 (4) セルには数式入れることができる。他のセルの数値はセル位置(F5 など)で引用す
52 る。

53 (5) 数式をコピーして他のセルに貼り付けると、相対的な位置関係が保たれる。

54 (6) セルの絶対位置を指定するには\$(ドルマーク)を付ける。

55

56 2.3 グラフ用データの作成

57 ここでは、

$$58 \quad y = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (2.1)$$

59 をグラフにすることを考える。

60

61

62

63 (1) 式を離散化する

64
$$y_i = A \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T}\right) \tag{2.2}$$

65 ここで、 i は i 番目のタイムステップを表す。時間 t を

66
$$t_i = \Delta t \times i \tag{2.3}$$

67 と表現している。ここで、 Δt は時間間隔である。

68 (2) パラメータ(固定値)と変数を区別する。

69

70 (3) Excel の新規シート作成を選ぶ。

71 (4) パラメータの表を作成する。図のシートでは左側の方である。

72

SUM ✖ ✔ fx =C4/C3				
	A	B	C	D
1	Parameters			
2	Amplitude	A	1	
3	Number of points per 1 cycle	M	100	
4	Period	T	10	
5	Time interval	Δt	=C4/C3	

73

SUM ✖ ✔ fx =4*ATAN(1)				
	A	B	C	D
1	Parameters			
2	Amplitude	A	1	
3	Number of points per 1 cycle	M	100	
4	Period	T	10	
5	Time interval	Δt	0.1	
6		π	=4*ATAN(1)	
7				

74

75 (5) タイムステップ i , 時間 t_i , y の値 y_i を入れるコラムを決める。

76

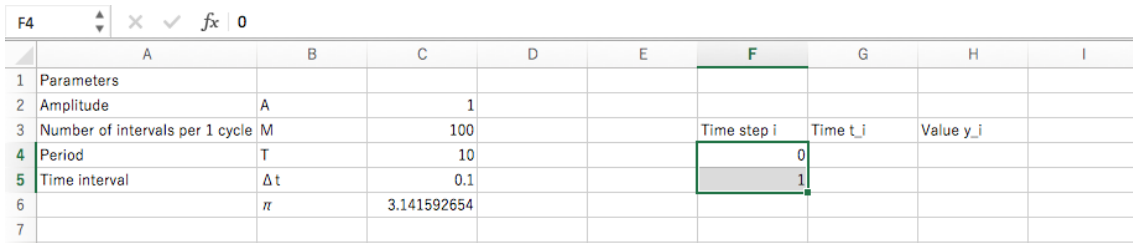
H3 ✖ ✔ fx Value y_i									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters								
2	Amplitude	A	1						
3	Number of intervals per 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i	
4	Period	T	10						
5	Time interval	Δt	0.1						
6		π	3.141592654						
7									

77

78 (6) タイムステップのコラムに 0,1 を入れる。

79

80 (7) 0, 1 を入れたセルを選択する.

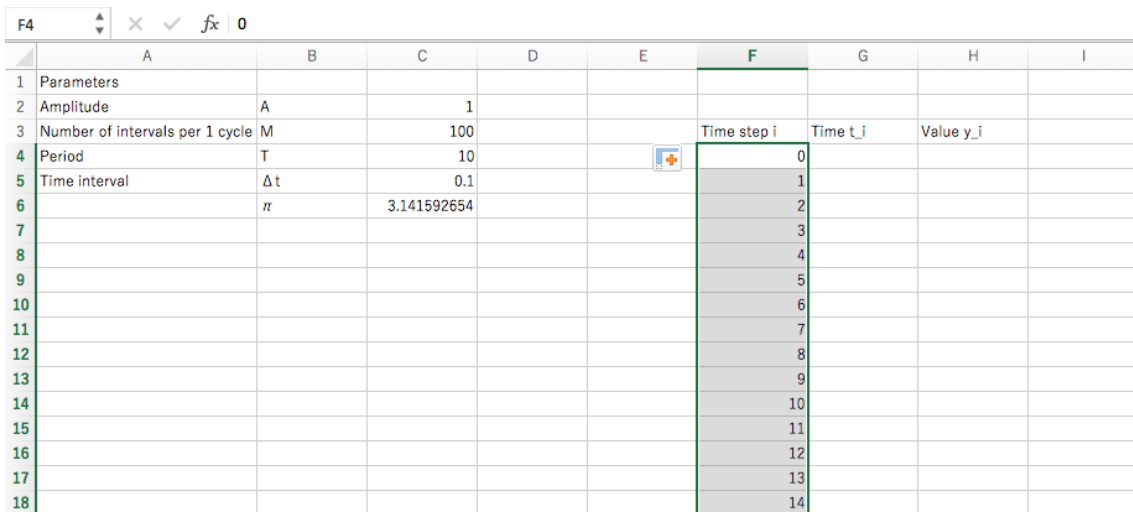


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters								
2	Amplitude	A	1						
3	Number of intervals per 1 cycle	M	100			Time step i	Time t _i	Value y _i	
4	Period	T	10			0			
5	Time interval	Δt	0.1			1			
6		π	3.141592654						
7									

81

82

83 (8) カーソルを右下の四角に当てると、カーソルが十字になるので、そのまま下に
84 ドラッグする。1 周期分の個数 n_s 個(ここでは 100 個)までとする。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters								
2	Amplitude	A	1						
3	Number of intervals per 1 cycle	M	100			Time step i	Time t _i	Value y _i	
4	Period	T	10			0			
5	Time interval	Δt	0.1			1			
6		π	3.141592654			2			
7						3			
8						4			
9						5			
10						6			
11						7			
12						8			
13						9			
14						10			
15						11			
16						12			
17						13			
18						14			

85

86

87 (9) (8) により 0,1,2... というコラムが出来る.

88

89 (10) 時間の所に数式を入力する。このとき、以下に注意。

90 ・式は=(イコール)で始める

91 ・絶対位置を使う変数に\$を付ける

f_x | $=\$C\$5*F4$

	B	C	D	E	F	G	H
	A	1					
er 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i
	T	10			0	$=\$C\$5*F4$	
	Δt	0.1			1		
	π	3.141592654			2		
					3		
					4		
					5		
					6		

92

93

94 (11) 式のセルをコピーして同じコラムの下のセルに貼り付け(ペースト)する。

The screenshot shows the Excel interface with the 'Paste' menu open. The spreadsheet data is as follows:

	B	C	D	E	F	G	H
	A	1					
er 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i
	T	10			0	0	
	Δt	0.1			1		
	π	3.141592654			2		
					3		
					4		
					5		
					6		
					7		
					8		
					9		
					10		

95

96

97 (12) sin の式を入力する。

f_x | $=\$C\$2*\sin(2*\$C\$6*G4/\$C\$4)$

	B	C	D	E	F	G	H	I
	A	1						
er 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i	
	T	10			0	0	$=\$C\$2*\sin(2*\$C\$6*G4/\$C\$4)$	
	Δt	0.1			1	0.1		
	π	3.141592654			2	0.2		
					3	0.3		
					4	0.4		
					5	0.5		

98

99 (13) 式を入れたセルをコピーしてじコラムの下のセルに貼り付け(ペースト)す
 100 る。

H5 f_x = $\$C\$2*\text{SIN}(2*\$C\$6*G5/\$C\$4)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters								
2	Amplitude	A	1						
3	Number of intervals per 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i	
4	Period	T	10			0	0	0	
5	Time interval	Δt	0.1			1	0.1	0.06279052	
6		π	3.141592654			2	0.2	0.125333234	
7						3	0.3	0.187381315	
8						4	0.4	0.248689887	
9						5	0.5	0.309016994	
10						6	0.6	0.368124553	
11						7	0.7	0.425779292	
12						8	0.8	0.481753674	
13						9	0.9	0.535826795	
14						10	1	0.587785252	
15						11	1.1	0.63742399	
16						12	1.2	0.684547106	
17						13	1.3	0.728968627	
18						14	1.4	0.770513243	

101
 102
 103

2.4 グラフの書き方

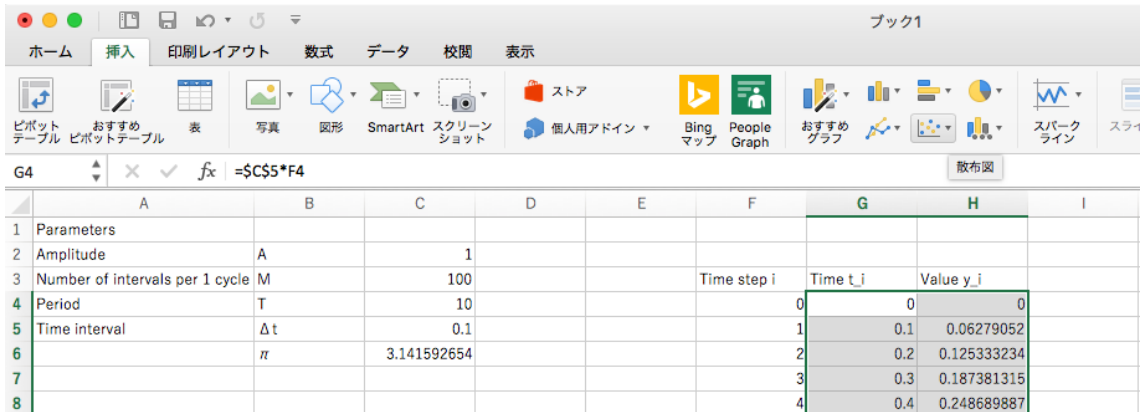
104 (1) グラフにするデータを選ぶ

G4 f_x = $\$C\$5*F4$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters								
2	Amplitude	A	1						
3	Number of intervals per 1 cycle	M	100			Time step i	Time t_i	Value y_i	
4	Period	T	10			0	0	0	
5	Time interval	Δt	0.1			1	0.1	0.06279052	
6		π	3.141592654			2	0.2	0.125333234	
7						3	0.3	0.187381315	
8						4	0.4	0.248689887	
9						5	0.5	0.309016994	
10						6	0.6	0.368124553	
11						7	0.7	0.425779292	
12						8	0.8	0.481753674	
13						9	0.9	0.535826795	
14						10	1	0.587785252	
15						11	1.1	0.63742399	
16						12	1.2	0.684547106	
17						13	1.3	0.728968627	
18						14	1.4	0.770513243	
19						15	1.5	0.809016994	
20						16	1.6	0.844327926	

106
 107
 108

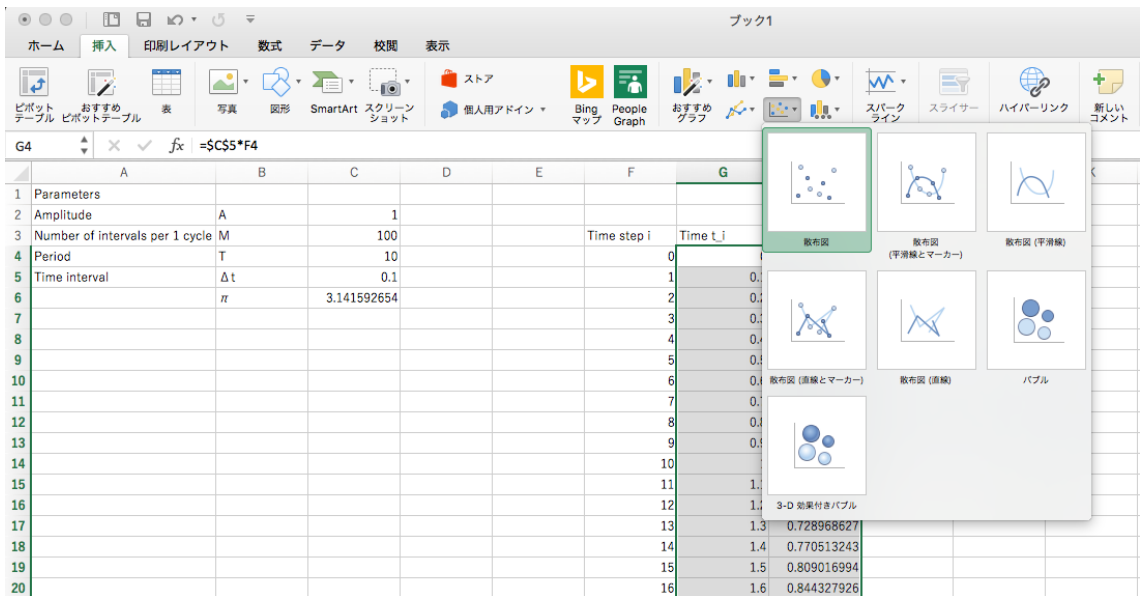
109 (2) 挿入からグラフの散布図を探す



110

111

112 (3) 散布図を押すとグラフの選択画面が出る。

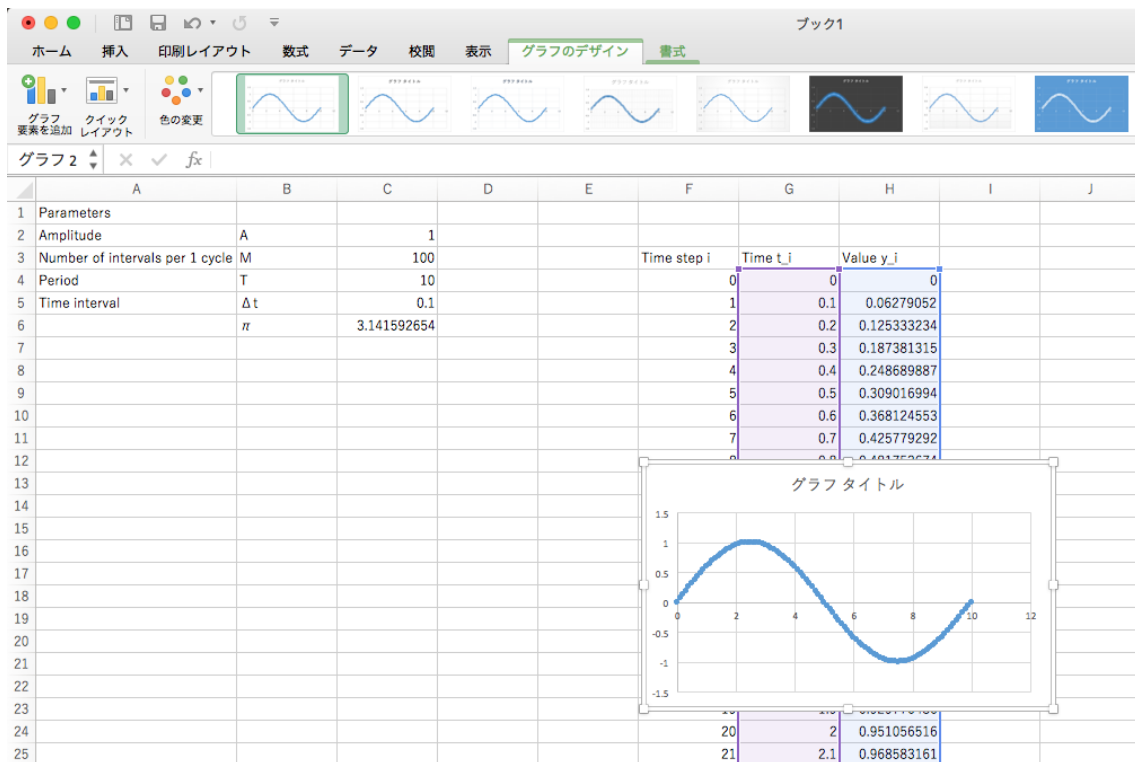


113

114

115

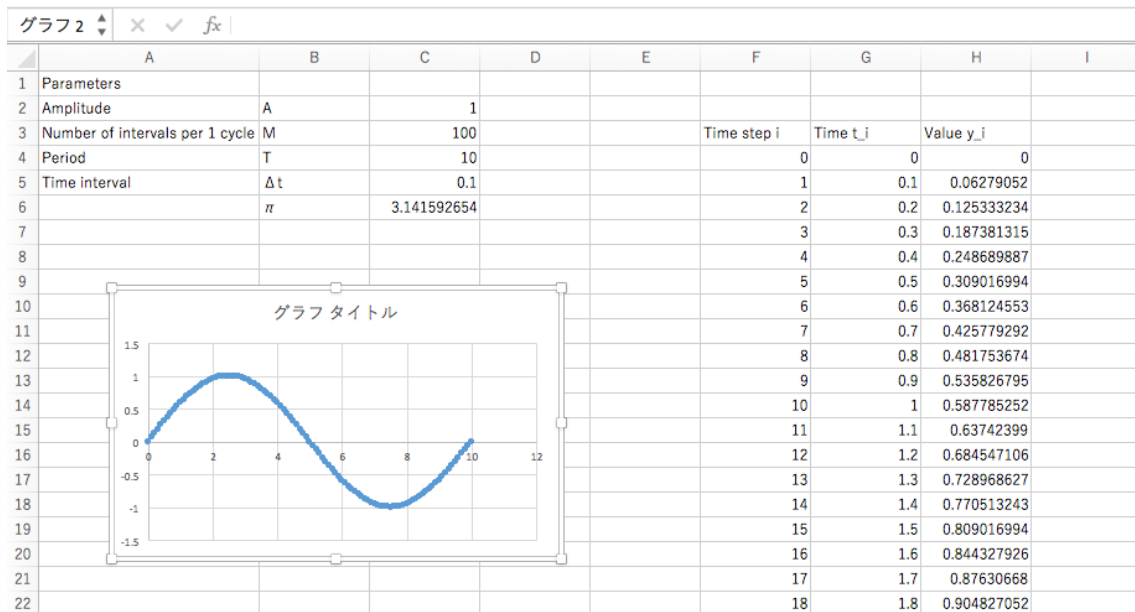
116 (4) どれか1つを選ぶとグラフが書ける



117

118

119 (5) グラフの枠の端をつかんで、適当な位置にグラフを移動する。



120

121

122

123 2.5 グラフの見栄えを良くする

124 Excel の標準設定のままだとグラフが見つらいので、見栄えを整える。

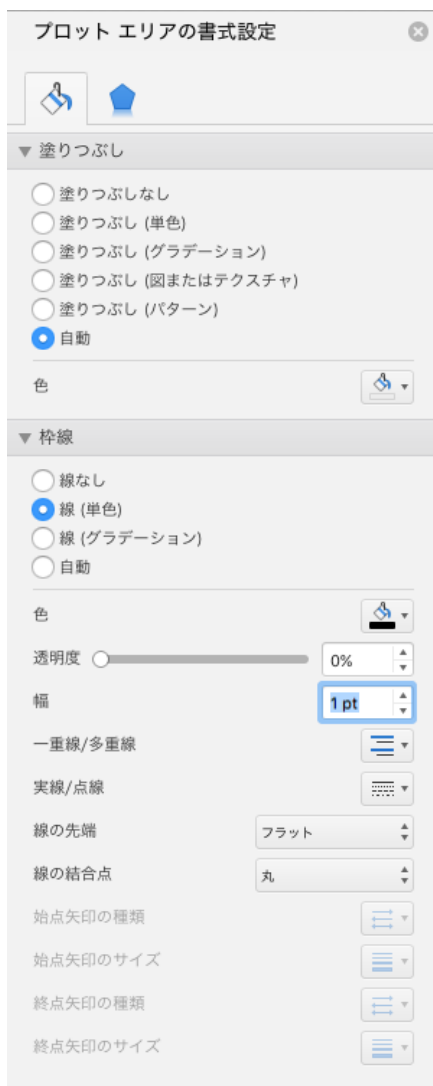
125 (1) グラフを大きくする。枠をカーソルでつかんで広げる。

126 (2) 枠線や座標軸の太さを変える

127 枠の右側の方をクリック。座標軸のときは座標軸をクリック。

128 プロットエリアの書式設定が現れる

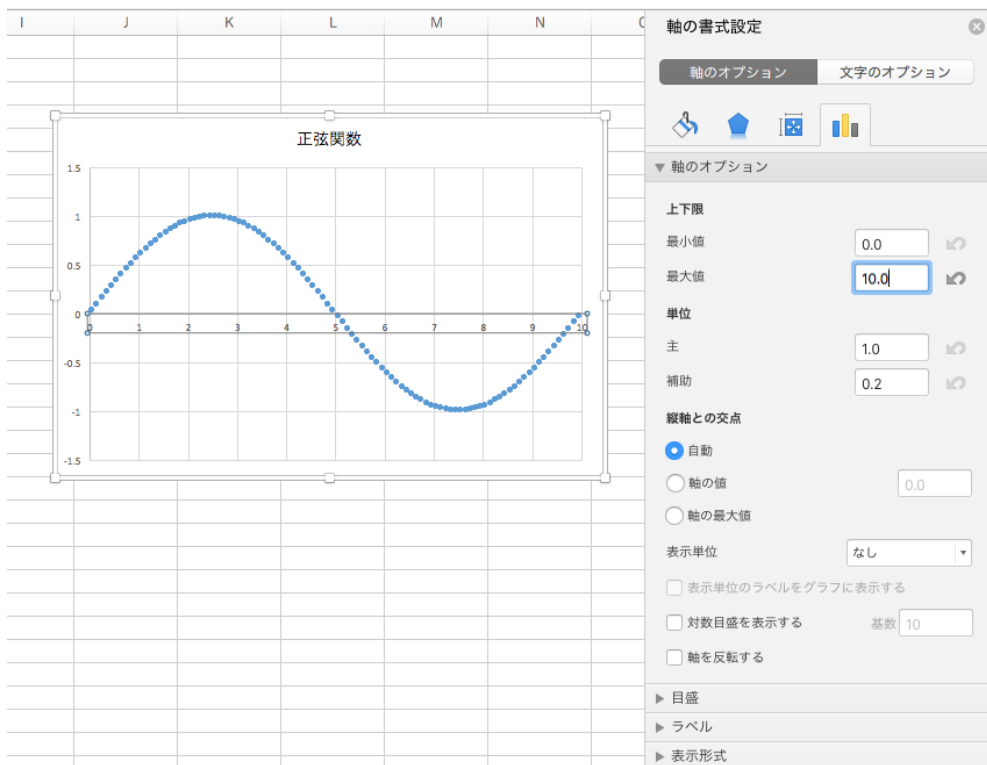
129 ペンキマークを選ぶと線の色や太さなどが設定できる



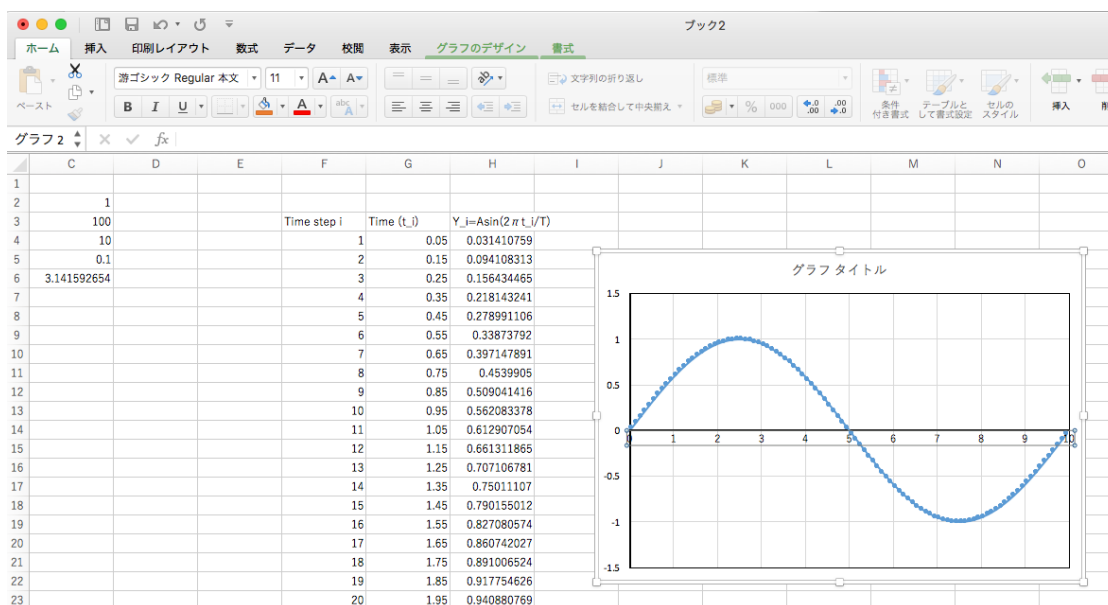
130

131

- 132 (3) 座標軸の範囲を設定
 133 座標軸をクリック→軸のオプションを選ぶ
 134 座標軸の範囲を入力する.



- 135
 136
 137 (4) グラフ座標軸の文字を大きくする.
 138 グラフの文字をクリックして、ホーム→フォントサイズを選ぶ

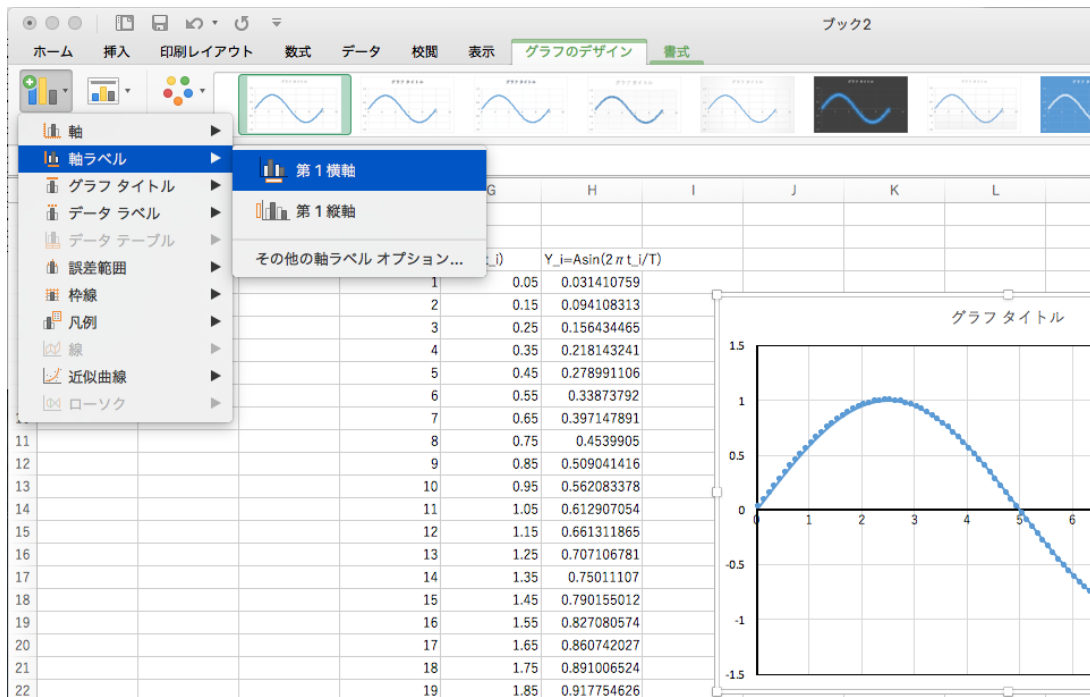


- 139
 11

140 (5) 座標軸の説明ラベルを付ける

141 (グラフ)デザイン→グラフに要素を追加→軸ラベル→第1横軸を選ぶ

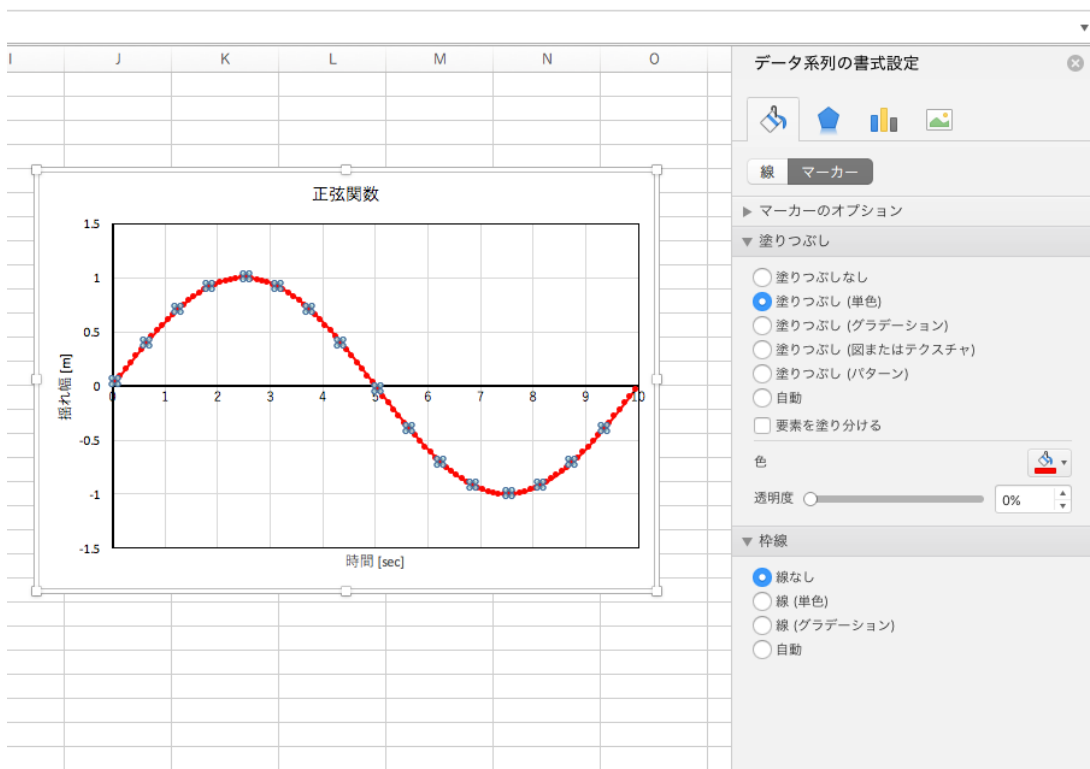
142 ラベルが表示されるのでクリックして適当なラベルを付ける



143

144

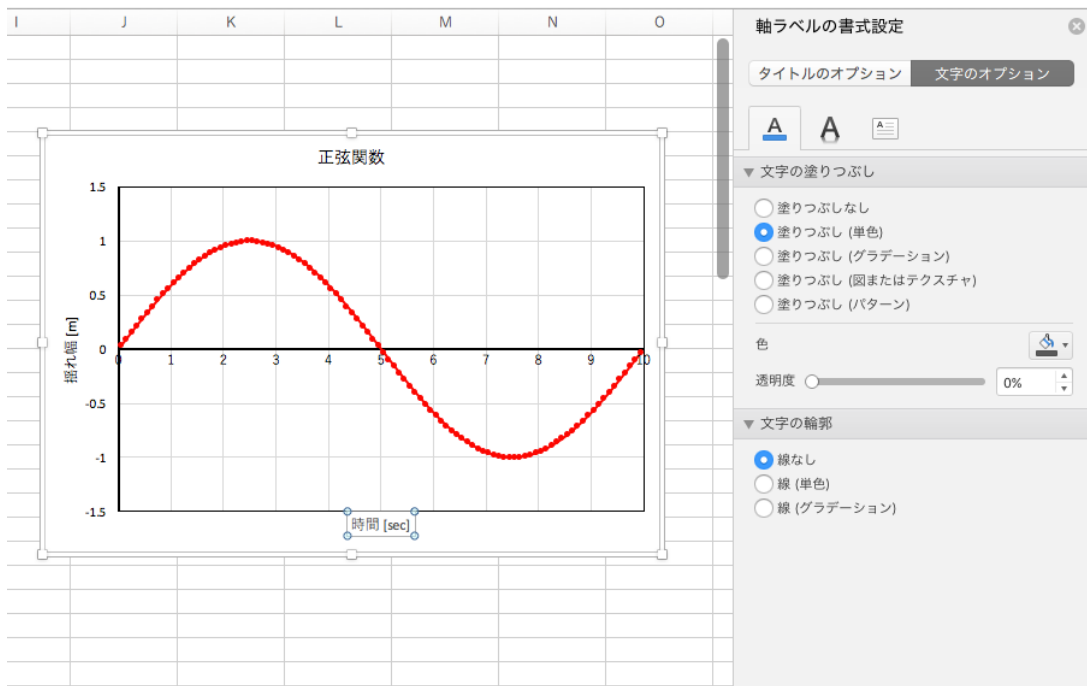
145 (6) グラフの線をクリックすると、色や線の太さを変えることができる。



146

147 (7) 文字の色などを変える

148 右の軸ラベル→文字の書式設定を選ぶ



149

150

151 (8) グラフのタイトルを変更し、文字の色やフォントなどを変える。

152

153

154 3. Microsoft Excel でフーリエ級数を計算する

155

156 3.1 フーリエ級数の離散化式

157 コンピュータでフーリエ級数を計算するには、次のように時間に対して(1.2)を離散化
158 した式を用いる。

$$159 \quad f(t_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{2\pi n t_i}{T} + \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n t_i}{T} \quad (3.1)$$

160 ここで、級数は無限級数ではなく、有限級数として計算する。最大の次数 N は、1 周
161 期当たりの時間軸の点数 M の半分以下でなくてはならない。この時の周波数

$$162 \quad v = \frac{N}{T} = \frac{M}{2T} \quad (3.2)$$

163 をナイキスト周波数と呼ぶ。(3.1)は、

$$164 \quad t_i = i \times \Delta t \quad (3.3)$$

$$165 \quad T = M \Delta t \quad (3.4)$$

166 を用いると

$$167 \quad f_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{2\pi n i}{M} + \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n i}{M} \quad (3.5)$$

168 と表される。この式を離散フーリエ級数とよぶ。次節の例では、式(3.1)を用いて計算
169 している。

170

171 3.2 Excel でフーリエ級数を計算

172 先ほどは正弦関数をプロットした。この時には、(21)式 2 行目の b_1 の項だけを Excel
173 で計算したと思えばよい。つまり、別の列(コラム)に cos と sin の次数の異なる行を作
174 り、その行の一番上のセルに係数を計算するところにする。

175

176 (1) 新しい Excel シートを開く。

177

178

179 (2) sin のときと同様左側にパラメータ表を作る.

	A	B	C	D
1	Parameters			
2				
3	Number of poin M		100	
4	Period	T	10	
5	Time interval	Δt	0.1	
6		π	3.141592654	
7				
8				

180

181 今回, 振幅はフーリエ係数で指定されるのでこの表には必要ない.

182

183 (3) 正弦関数のときと同様, タイムステップと時間のコラムを作る

G7 $=\$C\$5*F7$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Parameters							
2								
3	Number of intervals	M	100					
4	Period	T	10					
5	Time interval	Δt	0.1			Time step i	Time t _i	
6		π	3.141592654			0	0	
7						1	0.1	
8						2	0.2	
9						3	0.3	
10						4	0.4	
11						5	0.5	
12						6	0.6	
13						7	0.7	
14						8	0.8	
15						9	0.9	
16						10	1	
17						11	1.1	

184

185

186 (4) 次数とフーリエ係数を入れるセルを作る

F	G	H	I	J	K	L	M	N
	Order	1	3	5	7	9	11	13
	Coefficient							
Time step i	Time t _i							
0	0							

187

188

189

190 (5) 1 次のフーリエ係数を計算する

$f_x = 4/(H1*SC\$6)$

	B	C	D	E	F	G	H	I
						Order	1	
						Coefficient	$=4/(H1*SC\$6)$	
M		100						
T		10						
Δt		0.1			Time step i	Time t_i		
π		3.141592654			0	0		
					1	0.1		

191

192

193 (6) 1 次のフーリエ係数のセルを選んでコピー， 3 次～最高次数までのセルのコピー・ペーストする。

194

$f_x = 4/(I1*SC\$6)$

E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	F
		Order	1	3	5	7	9	11	13	15	
		Coefficient	1.273239545	0.424413182	0.254647909	0.181891364	0.141471061	0.11574905	0.097941503	0.084882636	0.074
		Time step i									
		Time t_i	0	0							

195

196

197 (7) フーリエ 1 次の項の $i=1$ の値を計算する。

$=H\$2*SIN(2*H\$1*SC\$6*SG6/SC\$4)$

	B	C	D	E	F	G	H	I
						Order	1	3
						Coefficient	1.273239545	0.424413182
M		100						
T		10						
Δt		0.1			Time step i	Time t_i		
π		3.141592654			0	0	$=H\$2*SIN(2*H\$1*SC\$6*SG6/SC\$4)$	
					1	0.1	SIN(数値)	
					2	0.2		

198

199

200

201 (8) このセルを1次の項の他の時間に対する値のセルへコピーして貼り付ける。

fx =H\$2*SIN(2*H\$1*\$C\$6*\$G7/\$C\$4)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Parameters						Order	1	3
2							Coefficient	1.273239545	0.424413182
3	Number of intervals	M	100						
4	Period	T	10						
5	Time interval	Δt	0.1			Time step i	Time t _i		
6		π	3.141592654			0	0	0	
7						1	0.1	0.079947372	
8						2	0.2	0.159579229	
9						3	0.3	0.2385813	
10						4	0.4	0.316641799	
11						5	0.5	0.393452657	
12						6	0.6	0.468710738	
13						7	0.7	0.542119031	
14						8	0.8	0.613387829	
15						9	0.9	0.682235864	
16						10	1	0.748391427	
17						11	1.1	0.811593431	
18						12	1.2	0.871592446	
19						13	1.3	0.928151683	
20						14	1.4	0.98104793	

202

203

204 (9) 2次以降の全てのセルへペーストする。

fx =I\$2*SIN(2*I\$1*\$C\$6*\$G6/\$C\$4)																		
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R						
Order	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19								
Coefficient	1.273239545	0.424413182	0.254647909	0.181891364	0.141471061	0.11574905	0.097941503	0.084882636	0.074896444	0.067012608								
Time step i	Time t _i																	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
1	0.1	0.079947372	0.0795271	0.078690531	0.077445576	0.075803985	0.073781221	0.071396283	0.068671495	0.065632254	0.062306747							
2	0.2	0.159579229	0.156236913	0.149678285	0.140149704	0.128006843	0.113698816	0.097748238	0.080728184	0.063237159	0.045873287							
3	0.3	0.2385813	0.227411955	0.206014486	0.176176912	0.140355519	0.101431665	0.062430264	0.026230177	-0.004702787	-0.028532581							
4	0.4	0.316641799	0.290530815	0.242184553	0.178669567	0.109005326	0.042610067	-0.012275325	-0.049892762	-0.067768328	-0.066880374							
5	0.5	0.393452657	0.343357477	0.254647909	0.147153204	0.043716962	-0.035768423	-0.079236341	-0.084882636	-0.060592496	-0.020708035							
6	0.6	0.468710738	0.384020528	0.242184553	0.087626833	-0.035182422	-0.097730155	-0.09620669	-0.049892762	0.009387013	0.051634102							
7	0.7	0.542119031	0.411079461	0.206014486	0.011421053	-0.103127965	-0.114836334	-0.052479682	0.026230177	0.069636952	0.058723596							
8	0.8	0.613387829	0.423575699	0.149678285	-0.066958677	-0.138965219	-0.079235677	0.024357061	0.080728184	0.057708702	-0.008398907							
9	0.9	0.682235864	0.421066557	0.078690531	-0.132593098	-0.131536466	-0.007267943	0.085826794	0.068671495	-0.014034194	-0.064907283							
10	1	0.748391427	0.403640922	3.11981E-17	-0.172988967	-0.083154603	0.068035584	0.093147905	3.11981E-17	-0.071230751	-0.039389022							
11	1.1	0.811593431	0.371916106	-0.078690531	-0.180457096	-0.008883041	0.11211258	0.041701464	-0.068671495	-0.054597158	0.035907151							
12	1.2	0.871592446	0.327015977	-0.149678285	-0.153575958	0.068154203	0.104732871	-0.036054672	-0.080728184	0.018625988	0.06582563							
13	1.3	0.928151683	0.270531144	-0.206014486	-0.097462266	0.123972035	0.049283548	-0.091063707	-0.026230177	0.072543434	0.012556911							
14	1.4	0.98104793	0.20446261	-0.242184553	-0.022797033	0.1411919	-0.028785618	-0.088620122	0.049892762	0.051270144	-0.056580616							
15	1.5	1.03007243	0.131150886	-0.254647909	0.056207522	0.114452492	-0.093642948	-0.030265589	0.084882636	-0.023144274	-0.054214338							
16	1.6	1.075031703	0.053193076	-0.242184553	0.124513207	0.052078971	-0.115520645	0.047183679	0.049892762	-0.073569822	0.016665358							
17	1.7	1.115748318	-0.026649124	-0.206014486	0.169118313	-0.026509033	-0.084377426	0.094864491	-0.026230177	-0.047774079	0.066484193							
18	1.8	1.152061584	-0.105547266	-0.149678285	0.181532442	-0.096843605	-0.014507203	0.082694746	-0.080728184	0.027571122	0.03228357							
19	1.9	1.18382819	-0.180706344	-0.078690531	0.159392617	-0.137026487	0.062021442	0.018352408	0.068671495	0.074305863	-0.042715444							
20	2	1.210922766	-0.249463809	-6.23963E-17	0.106913061	-0.134546974	0.110083888	-0.057568571	-6.23963E-17	0.044023025	-0.063732777							

205

206

207 (10) 適当な次数までの総和を取る。この例は5次までのフーリエ級数。

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19		Fourier Series max n
	1.273239545	0.424413182	0.254647909	0.181891364	0.141471061	0.11574905	0.097941503	0.084882636	0.074896444	0.067012608		5
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		=SUM(H6:J6)
0.1	0.079947372	0.0795271	0.078690531	0.077445576	0.075803985	0.073781221	0.071396283	0.068671495	0.065632254	0.062306747		SUM(数値1, [数値2],
0.2	0.159579229	0.156236913	0.149678285	0.140149704	0.128006843	0.113698816	0.097748238	0.080728184	0.063237159	0.045873287		
0.3	0.2385813	0.227411955	0.206014486	0.176176912	0.140355519	0.101431665	0.062430264	0.026230177	-0.004702787	-0.028532581		
0.4	0.316641799	0.290530815	0.242184553	0.178669567	0.109005326	0.042610067	-0.012275325	-0.049892762	-0.067768328	-0.066880374		
0.5	0.393452657	0.343357477	0.254647909	0.147153204	0.043716962	-0.035768423	-0.079236341	-0.084882636	-0.060592496	-0.020708035		

208

209

210 (11) このセルをコピーして、他の時間にペーストする。

N	O	P	Q	R	S
13	15	17	19		Fourier Series
0.097941503	0.084882636	0.074896444	0.067012608		max n
					5
0	0	0	0		0
0.071396283	0.068671495	0.065632254	0.062306747		0.238165004
0.097748238	0.080728184	0.063237159	0.045873287		0.465494427
0.062430264	0.026230177	-0.004702787	-0.028532581		0.67200774
-0.012275325	-0.049892762	-0.067768328	-0.066880374		0.849357167
-0.079236341	-0.084882636	-0.060592496	-0.020708035		0.991458043
-0.09620669	-0.049892762	0.009387013	0.051634102		1.094915819
-0.052479682	0.026230177	0.069636952	0.058723596		1.159212978
0.024357061	0.080728184	0.057708702	-0.008398907		1.186641813
0.085826794	0.068671495	-0.014034194	-0.064907283		1.181992953
0.093147905	3.11981E-17	-0.071230751	-0.039389022		1.152032349
0.041701464	-0.068671495	-0.054597158	0.035907151		1.104819005
-0.036054672	-0.080728184	0.018625988	0.065825663		1.048930137
-0.091063707	-0.026230177	0.072543434	0.012556911		0.992668341
-0.088620122	0.049892762	0.051270144	-0.056580616		0.943325987
-0.030265589	0.084882636	-0.023144274	-0.054214338		0.906575406

211

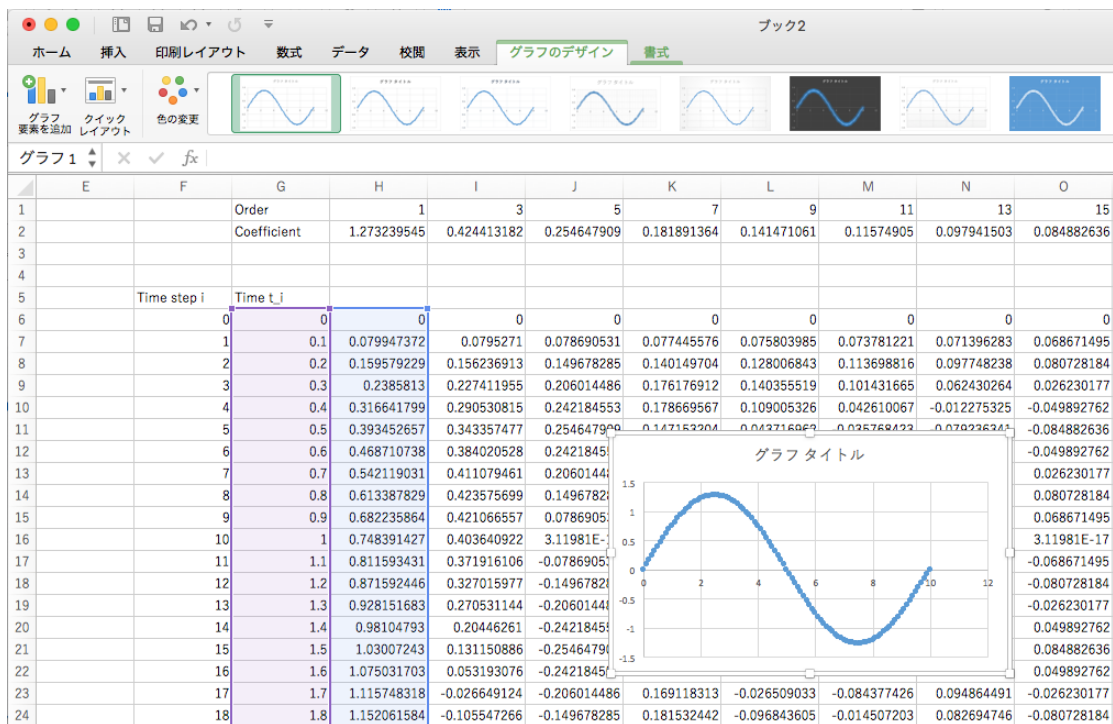
212

213 3.3 グラフの作成

214 (1) 時間のコラムと、その隣の項、ここでは1次の項のみを選択する。

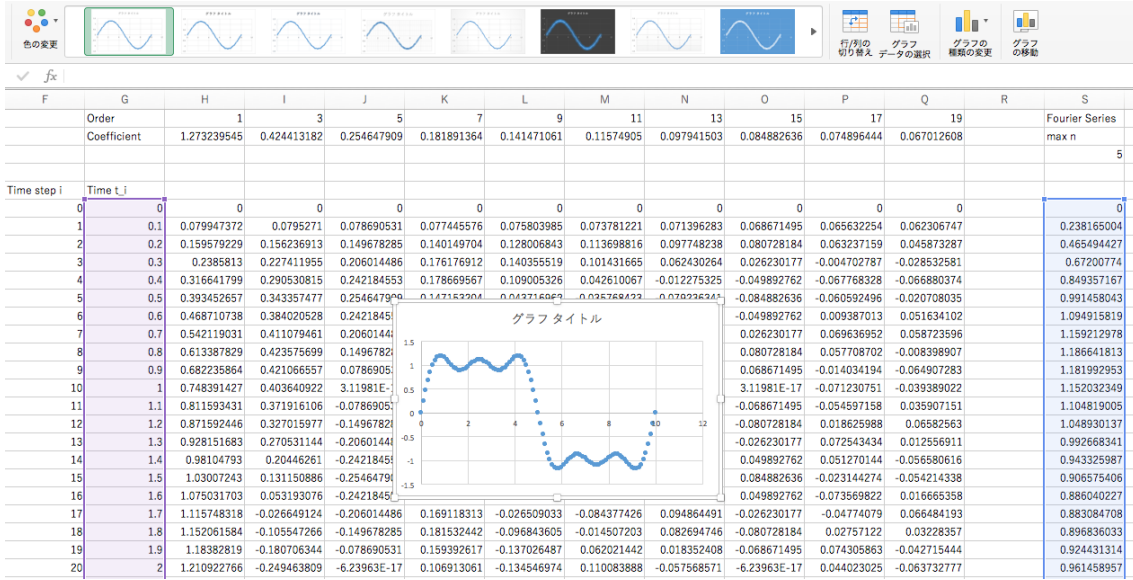
215

216 (2) 正弦関数のときと同様、グラフを書く。



217

218 (3) 1 次の項の列に表示されている枠線をカーソルでつかんでフーリエ級数の解
 219 の列まで移動する。図は5次までのフーリエ級数を求めた場合、



220
 221
 222
 223

(4) 正弦関数のときと同様、グラフの体裁を整える。

224 4. 離散フーリエ変換

225

226 4.1 フーリエ係数

227 周期関数

228
$$f(t+T) = f(t) \tag{4.1}$$

229 のフーリエ級数

230
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \tag{4.2}$$

231 の係数をフーリエ係数と呼ぶ。フーリエ係数はフーリエ積分

232
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \cos \left[\frac{2\pi n t_i}{T} \right] dt \tag{4.3}$$

233
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \sin \left[\frac{2\pi n t_i}{T} \right] dt \tag{4.4}$$

234 で表される。フーリエ積分を求めることをフーリエ変換と言うことがある。

235

236 4.2 離散フーリエ変換

237 今、奇関数

238
$$f(-t) = -f(t) \tag{4.5}$$

239 を考える。このとき、フーリエ級数はフーリエ正弦級数

240
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \tag{4.6}$$

241 となる。時間 t を

242
$$t_i = \Delta t i$$

243 のように離散化する。ただし、 i は整数

244
$$i = 0, 1, 2, \dots$$

245 である。フーリエ正弦級数は離散化されて

246
$$f(t_i) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n t_i}{T} = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n \Delta t i}{M \Delta t} = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n i}{M} \tag{4.7}$$

247 と表すことができる。 M は 1 周期当たりの時間の離散点数である。このとき、フーリエ

248 係数は

249
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \sin \frac{2\pi n t_i}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t_i) \sin \frac{2\pi n t_i}{T} dt$$
 (4.8)

250 である。積分に長方形法を適用すると、

251
$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta t f(t_i) \sin \frac{2\pi n t_i}{T}$$

252
$$= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f(t_i) \sin \frac{2\pi n t_i}{T}$$

253
$$= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f(t_i) \sin \frac{2\pi n i \Delta t}{M \Delta t}$$

254
$$= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f(t_i) \sin \frac{2\pi n i}{M}$$

255
$$= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_i \sin \frac{2\pi n i}{M}$$
 (4.9)

256 と求められる。これを離散フーリエ正弦変換と呼ぶ。

257

258

259 5. Microsoft Excel でフーリエ正弦変換を計算する

260

261 5.1 離散フーリエ正弦変換の計算

262 離散フーリエ正弦変換の式

$$b_n = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_i \sin \frac{2\pi ni}{M} \quad (5.1)$$

263

264 を計算する。離散化することにより、次数は無限まであるのではなく、最大値が存在
265 する。最大の次数 N は、1 周期当たりの時間軸の点数 M の半分以下でなくてはならな
266 い。

267

268 5.2 Excel でフーリエ係数を計算

269 フーリエ級数を計算したときと同様、縦方向に時間、横方向に次数

270 (1) 新しい Excel シートを開く。

271 (2) 左側にパラメータ表を作る。

	A	B	C	D
1	Parameters			
2				
3	Number of poin M		100	
4	Period	T	10	
5	Time interval	Δt	0.1	
6				

272

273 今回、振幅はフーリエ係数で指定されるのでこの表には必要ない。

274

275 (3) 次数とフーリエ係数を入れるセルを作る。偶数次は 0 になるので、確認用の 2 次
276 だけで良い。

E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
	Order					1	2	3	5	7	9
	Coeff (calculated)										
	Coeff (theoretical)										

277

278

279

280 (4) タイムステップ番号を入力し時間を計算する

fx | = \$C\$5 * F6

	B	C	D	E	F	G	H
					Order		
					Coeff (calculated)		
M		100			Coeff (theoretical)		
T		10					
Δt		0.1			Time step i	Time t_i	f_i
					0	= \$C\$5 * F6	
					1		
					2		
					3		
					4		

281

282

283 (5) 矩形波の値を入力する。タイムステップ 1~49 は 1, 51~99 は -1, 0, 50, 100 は 0

284 を入力する。

E	F	G	H	I	J
	Order				
	Coefficient				
	$4/n\pi$				
	Time step i	Time t_i	f(t_i)		
	0	0	0		
	1	0.1	1		
	2	0.2	1		
	3	0.3	1		
	4	0.4	1		
	5	0.5	1		
	6	0.6	1		
	7	0.7	1		
	8	0.8	1		
	9	0.9	1		
	10	1	1		
	11	1.1	1		
	12	1.2	1		
	13	1.3	1		
	14	1.4	1		
	15	1.5	1		
	16	1.6	1		
	17	1.7	1		
	18	1.8	1		
	19	1.9	1		
	20	2	1		

E	F	G	H	I
	36	3.6	1	
	37	3.7	1	
	38	3.8	1	
	39	3.9	1	
	40	4	1	
	41	4.1	1	
	42	4.2	1	
	43	4.3	1	
	44	4.4	1	
	45	4.5	1	
	46	4.6	1	
	47	4.7	1	
	48	4.8	1	
	49	4.9	1	
	50	5	0	
	51	5.1	-1	
	52	5.2	-1	
	53	5.3	-1	
	54	5.4	-1	
	55	5.5	-1	
	56	5.6	-1	
	57	5.7	-1	
	58	5.8	-1	
	59	5.9	-1	
	60	6	-1	
	61	6.1	-1	

285

286

287 (6) 式(31)の Σ の中を $n = 1, i = 0$ について計算する。

fx | = \$H6 * SIN(2 * PI() * J\$1 * \$F6 / \$C\$3)

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
				Order				1	2	3
				Coefficient						
				$4/n\pi$						
M	100			Time step i	Time t_i	f(t_i)				
T	10			0	0	0				
Δt	0.1			1	0.1	1				
				2	0.2	1				
				3	0.3	1				
				4	0.4	1				

288

289

290 (7) コピー・ペーストで次数1次の列を作る。

	F	G	H	I	J	K
Order					1	2
Coefficient						
$4/n\pi$						
Time step i	Time t _i	f(t _i)				
0	0	0			0	
1	0.1	1			0.06279052	
2	0.2	1			0.125333234	
3	0.3	1			0.187381315	
4	0.4	1			0.248689887	
5	0.5	1			0.309016994	
6	0.6	1			0.368124553	
7	0.7	1			0.425779292	
8	0.8	1			0.481753674	
9	0.9	1			0.535826795	
10	1	1			0.587785252	
11	1.1	1			0.63742399	
12	1.2	1			0.684547106	
13	1.3	1			0.728968627	
14	1.4	1			0.770513243	
15	1.5	1			0.809016994	
16	1.6	1			0.844327926	
17	1.7	1			0.87630668	
18	1.8	1			0.904827052	
19	1.9	1			0.929776486	
20	2	1			0.951056516	

291

292

293 (8) 他の次数にもペーストする。

I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.06279052	0.125333234	0.187381315	0.309016994	0.425779292	0.535826795	0.63742399	0.728968627	0.809016994	0.87630668	0.929776486	
0.125333234	0.248689887	0.368124553	0.587785252	0.770513243	0.904827052	0.982287251	0.998026728	0.951056516	0.844327926	0.684547106	
0.187381315	0.368124553	0.535826795	0.809016994	0.968583161	0.992114701	0.87630668	0.63742399	0.309016994	-0.06279052	-0.425779292	
0.248689887	0.481753674	0.684547106	0.951056516	0.982287251	0.770513243	0.368124553	-0.125333234	-0.587785252	-0.904827052	-0.998026728	
0.309016994	0.587785252	0.809016994	1	0.809016994	0.309016994	-0.309016994	-0.809016994	-1	-0.809016994	-0.309016994	
0.368124553	0.684547106	0.904827052	0.951056516	0.481753674	-0.248689887	-0.844327926	-0.982287251	-0.587785252	0.125333234	0.770513243	
0.425779292	0.770513243	0.968583161	0.809016994	0.06279052	-0.728968627	-0.992114701	-0.535826795	0.309016994	0.929776486	0.87630668	
0.481753674	0.844327926	0.998026728	0.587785252	-0.368124553	-0.982287251	-0.684547106	0.248689887	0.951056516	0.770513243	-0.125333234	
0.535826795	0.904827052	0.992114701	0.309016994	-0.728968627	-0.929776486	-0.06279052	0.87630668	0.809016994	-0.187381315	-0.968583161	
0.587785252	0.951056516	0.951056516	1.22515E-16	-0.951056516	-0.587785252	0.587785252	0.951056516	3.67545E-16	-0.951056516	-0.587785252	
0.63742399	0.982287251	0.87630668	-0.309016994	-0.992114701	-0.06279052	0.968583161	0.425779292	-0.809016994	-0.728968627	0.535826795	
0.684547106	0.998026728	0.770513243	-0.587785252	-0.844327926	0.481753674	0.904827052	-0.368124553	-0.951056516	0.248689887	0.982287251	
0.728968627	0.998026728	0.63742399	-0.809016994	-0.535826795	0.87630668	0.425779292	-0.929776486	-0.309016994	0.968583161	0.187381315	
0.770513243	0.982287251	0.481753674	-0.951056516	-0.125333234	0.998026728	-0.248689887	-0.904827052	0.587785252	0.684547106	-0.844327926	
0.809016994	0.951056516	0.309016994	-1	0.309016994	0.809016994	-0.809016994	-0.309016994	1	-0.309016994	-0.809016994	
0.844327926	0.904827052	0.125333234	-0.951056516	0.684547106	0.368124553	-0.998026728	0.481753674	0.587785252	-0.982287251	0.248689887	
0.87630668	0.844327926	-0.06279052	-0.809016994	0.929776486	-0.187381315	-0.728968627	0.968583161	-0.309016994	-0.63742399	0.992114701	

294

295

296

297 (9) 次数1次の総和を取り、 $2/M$ を掛け算すると、フーリエ係数が得られる。

✓ fx =2/SC53*SUM(6:J105)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
					Order				1	2
					Coefficient				=2/SC53*SUM(6:J105)	
M		100			4/nπ					
T		10								
Δt		0.1			Time step i	Time t _i	f(t _i)			
					0	0	0		0	
					1	0.1	1		0.06279052	
					2	0.2	1		0.125333234	
					3	0.3	1		0.187381315	
					4	0.4	1		0.248689887	

298

299

300 (10) フーリエ係数の理論値を計算する。

I	J	K
	1	2
	1.272820638	
	=4/(J1*PI0)	

301

302

303 (11) 他の次数へコピー・ペーストし、フーリエ係数とその理論値を得る。

I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
	1.272820638	1.19904E-16	0.4231558	0.252550061	0.178949713	0.137680903	0.111104274	0.092434546	0.07850442	0.067636306	0.058858213	0.051567689	0.045371094	0.04
	1.273239545	0.636619772	0.424413182	0.254647909	0.181891364	0.141471061	0.11574905	0.097941503	0.084882636	0.074896444	0.067012608	0.060630455	0.055358241	0.050929582
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.06279052	0.125333234	0.187381315	0.309016994	0.425779292	0.535826795	0.63742399	0.728968627	0.809016994	0.87630668	0.929776486	0.968583161	0.992114701	1
	0.125333234	0.248689887	0.368124553	0.587785252	0.770513243	0.904827052	0.982287251	0.998026728	0.951056516	0.844327926	0.684547106	0.481753674	0.248689887	1.22515E-16
	0.187381315	0.368124553	0.535826795	0.809016994	0.968583161	0.992114701	0.87630668	0.63742399	0.309016994	-0.06279052	-0.425779292	-0.728968627	-0.929776486	-1
	0.248689887	0.481753674	0.684547106	0.951056516	0.982287251	0.770513243	0.368124553	-0.125333234	-0.587785252	-0.904827052	-0.998026728	-0.844327926	-0.481753674	-2.4503E-16
	0.309016994	0.587785252	0.809016994	1	0.809016994	0.309016994	-0.309016994	-0.809016994	-1	-0.809016994	-0.309016994	0.309016994	0.809016994	1
	0.368124553	0.684547106	0.904827052	0.951056516	0.481753674	-0.248689887	-0.844327926	-0.982287251	-0.587785252	0.125333234	0.770513243	0.998026728	0.684547106	3.67545E-16
	0.425779292	0.770513243	0.968583161	0.809016994	0.06279052	-0.728968627	-0.992114701	-0.535826795	0.309016994	0.929776486	0.87630668	0.187381315	-0.63742399	-1
	0.481753674	0.844327926	0.998026728	0.587785252	-0.368124553	-0.982287251	-0.684547106	0.248689887	0.951056516	0.770513243	-0.125333234	-0.904827052	-0.844327926	-4.90059E-16
	0.535826795	0.904827052	0.992114701	0.309016994	-0.728968627	-0.929776486	-0.06279052	0.87630668	0.809016994	-0.187381315	-0.968583161	-0.63742399	0.425779292	1

304

305

306 (12) 2次の理論値は0に修正する

I	J	K	L	M
	1	2	3	5
	1.272820638	1.66533E-17	0.4231558	0.252550061
	1.273239545	0	0.424413182	0.254647909

307

308

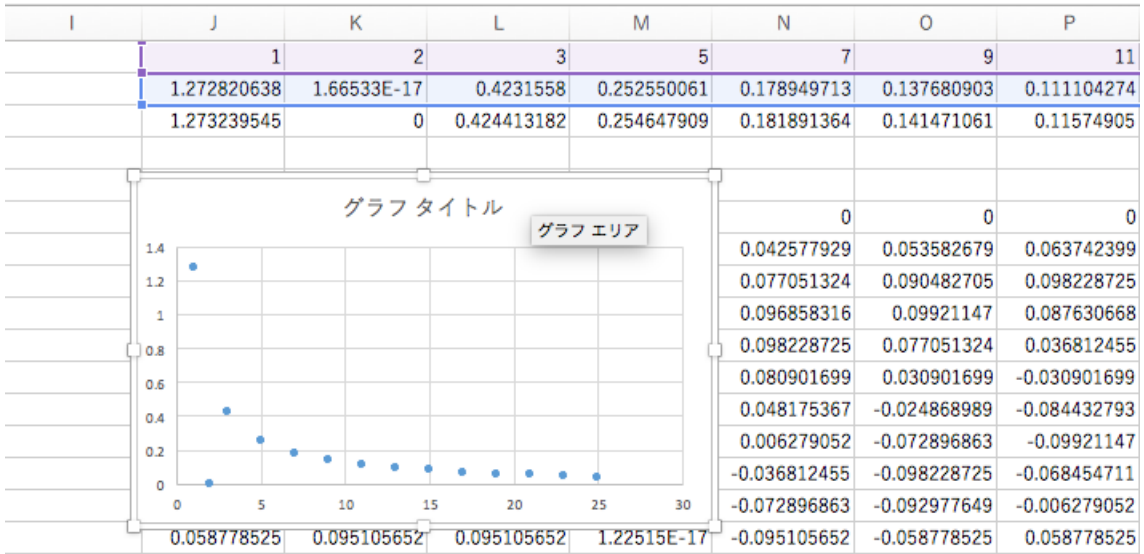
309 (14) 次数と計算されたフーリエ係数だけを選ぶ

I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	1.272820638	1.66533E-17	0.4231558	0.252550061	0.178949713	0.137680903	0.111104274	0.092434546	0.07850442	0.067636306	0.058858213
	1.273239545	0	0.424413182	0.254647909	0.181891364	0.141471061	0.11574905	0.097941503	0.084882636	0.074896444	0.067012608

310

311

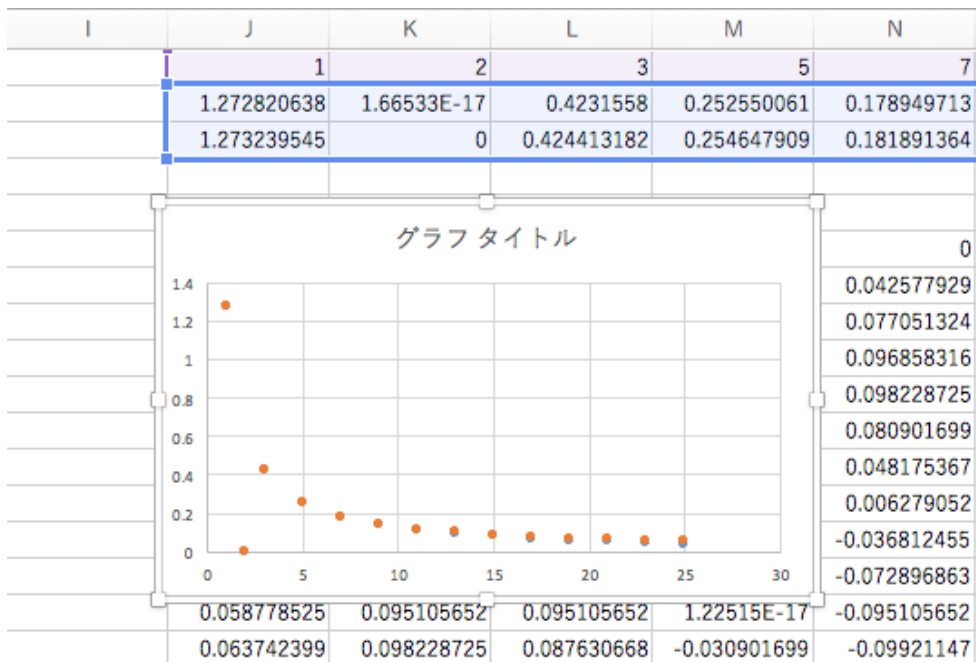
312 (15) グラフを作成する.



313

314

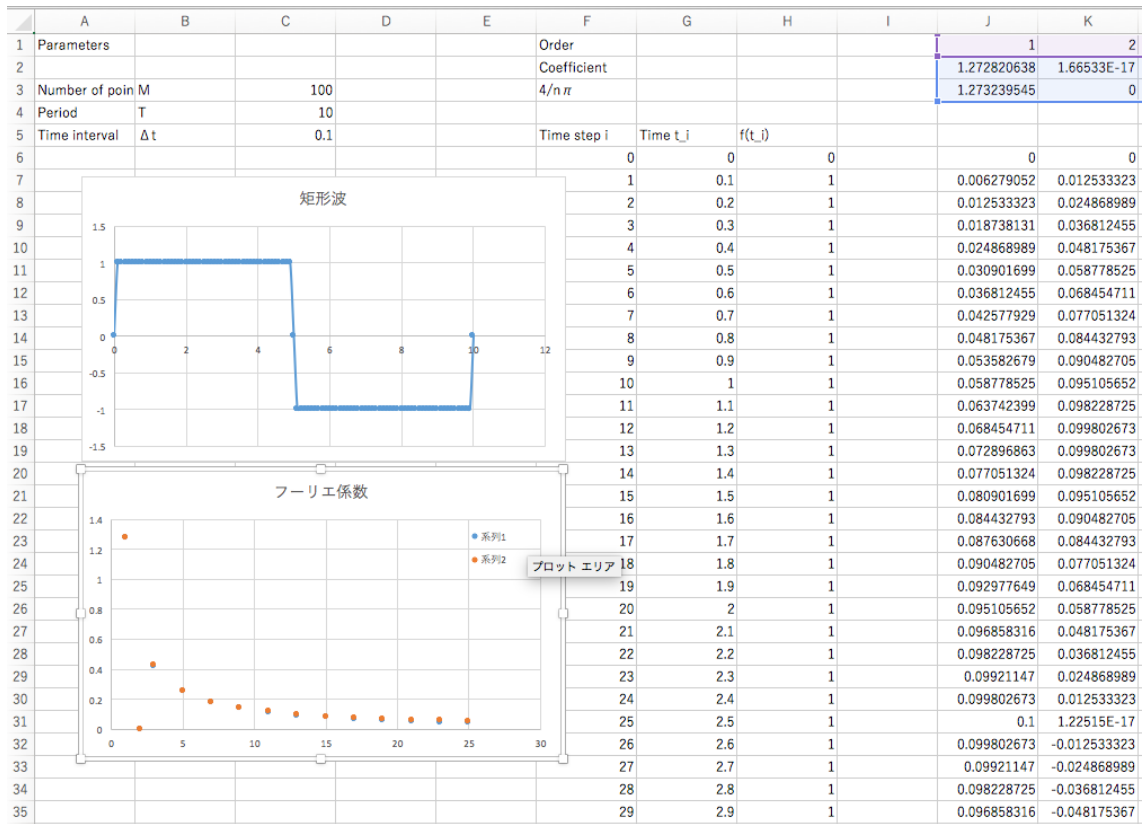
315 (16) 左下の青い■をドラッグして、理論値も選択する.



316

317

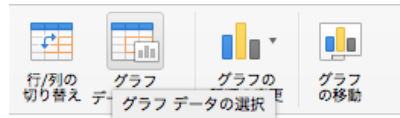
318 (17) グラフの体裁を整える.



319

320

321 グラフ中の凡例の文字を変えるには、凡例をクリックした状態で、「グラフデータの選
322 択」ボタン



323

324 を押して「データソースの選択」を出して名前所の所に入力する。

データソースの選択

範囲の詳細

グラフデータの範囲:

凡例項目 (系列):

系列1	名前: <input type="text" value="離散値"/>
系列2	X の値: <input type="text" value="=Sheet1!\$J\$1:\$W\$1"/>
	Y の値: <input type="text" value="=Sheet1!\$J\$2:\$W\$2"/>

横 (項目) 軸ラベル:

非表示および空白のセル

空白セルの表示方法:

非表示の行と列のデータを表示する

325

326

327