IX. 行列とテンソル

21．行列

数を $m \times n$ の四角に並べて１つの量を表すとしたもの行列とよぶ。行列には添え字が２つある。

21.1 行列

次のように数を四角く並べたものを行列とよぶ。横を行(row)，縦を列(column)という。行数が m，列数が n のとき $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列という。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

１つ１つの数を要素あるいは成分(component)とよび，行列 $\boldsymbol{A}$ について，i 行，j 列の要素を a_{ij} で表す。行列要素は２つの添え字を持つ。

21.1 零行列

すべての成分が 0 である行列を零行列といい，O で表す。

$$o_{ij} = 0 \tag{21.2}$$

この行列はスカラーの 0 と同様な役割を持つ。

21.2 行列の和とスカラー倍

行列も 1 階テンソルであるベクトルと同様，四則演算を考えることができる。行列の和はやはり成分ごとの和である。すなわち，

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{21.5}$$

は

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{21.6}$$

と計算する。行列のスカラー倍も同様に，成分すべてにスカラーをかける。

$$\boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{A} \tag{21.7}$$

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \tag{21.8}$$

であり，

$$\alpha \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \alpha \tag{21.9}$$

が成り立つ。

21.3 行列の積

　行列の積

$$C = AB \tag{21.10}$$

は次のように定義される。ここで, 行列の１つの行を取り出した数の並びを行ベクトル, １つの列を取り出したものを列ベクトルとよぶ。つまり,

$$\boldsymbol{p}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \tag{21.11}$$

$$\boldsymbol{q}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \tag{21.12}$$

である。積の行列 $\boldsymbol{C}$ の ij 成分は $\boldsymbol{A}$ の i 行ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{B}$ の j 列ベクトル $\boldsymbol{q}$ の内積をとったものと定義する。したがって，行列の積 $\boldsymbol{AB}$ が計算できるには，$\boldsymbol{A}$ の列数と $\boldsymbol{B}$ の行数が同じでなくてはならない。また，$\boldsymbol{A}$ が $l \times m$ 行列，$\boldsymbol{B}$ が $m \times n$ 行列のとき行列の積 $\boldsymbol{C}$ は $l \times n$ 行列となる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \tag{21.13}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \tag{21.14}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix} \tag{21.15}$$

このとき,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{q}_j \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i2}b_{2j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{ik}b_{kj} \end{aligned} \tag{21.16}$$

である。総和を取る場合にはこの式の最右辺のように総和記号Σを省略してかく

ことが多い。この表記法をアインシュタインの規約とよぶ。行列の積は，必ずしもスカラーの積やベクトルの内積のように交換法則が成立しない。一般に，

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{21.17}$$

である。また，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \tag{21.18}$$

となるような行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の組み合わせが存在する。このとき，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の組を零因子という。

21.4 転置行列と行列の積の転置

行列 $\boldsymbol{A}$ の列と行を入れ替えた行列を考えることができる。このような行列を転置行列といい，$\boldsymbol{A}^T$ で表す。つまり，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \tag{21.19}$$

$$b_{ij} = a_{ji} \tag{21.20}$$

である。行列の積の転置をとると，

$$\left(\boldsymbol{AB}\right)^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T \tag{21.21}$$

が成り立つ。

21.3 行列とベクトルの積

行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトルの積を考えることも可能である。行列の積に対する行数・列数の制約から，行列を前からかける場合は列ベクトル，後ろから演算する場合は行ベクトルでなければならない。つまり，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \tag{21.22}$$

のとき，

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Ap} \tag{21.24}$$

は

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \tag{21.23}$$

より

$$q_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p_k = a_{ik} p_k \tag{21.25}$$

と計算される。一方，行列を後ろからかける場合には

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \tag{21.26}$$

を転置して

$$\boldsymbol{r}^T = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_m \end{pmatrix} \tag{21.27}$$

行ベクトルに演算すると考える。すなわち，

$$\boldsymbol{s}^T = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{A} \tag{21.28}$$

は，

$$\boldsymbol{s}^T = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{21.29}$$

より，

$$s_j = \sum_{k=1}^{m} r_k a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} r_k = r_k a_{kj} = a_{kj} r_k \tag{21.30}$$

のように計算する。ここで，(21.30)は成分なので，a と r を入れ替えて書くこともできる。$\boldsymbol{r}$ の行と，$\boldsymbol{A}$ の列から総和をとっていることは，添字の位置からわかる。

21.6 正方行列と単位行列

$n \times n$ の行列を正方行列という。このとき，i 行，i 列の要素を対角要素，それ以外の要素を非対角要素という。この節以降で取り扱う行列はすべて正方行列である。

対角要素がすべて 1 で，非対角要素がすべての正方行列を単位行列とよび，$\boldsymbol{I}$ で表す。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21.32}$$

この行列はスカラーの 1 と同様な働きを持つ。クロネッカーのデルタδ_{ij}を用いると，その成分は

$$I_{ij} = \delta_{ij} \tag{21.33}$$

と表すことができる。クロネッカーのデルタは$i = j$のとき 1 で，それ以外のときには 0 となる 2 階テンソルである。

21.6 行列から作られるスカラー量：対角和

行列$\boldsymbol{A}$の対角成分の和を対角和といい，tr で表される。すなわち，

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{21.34}$$

である。行列から作られるスカラー量は座標系の変換をしても不変な量である。

21.7 行基本操作

行列 $\boldsymbol{A}$ のある行の行ベクトルをスカラー倍して，別の行に加えることを行基本操作という。すなわち，i行ベクトルを$\boldsymbol{p}_i$とするとき，

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{p}_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_j + c\boldsymbol{p}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \tag{21.35}$$

という行列を作ることである。行基本操作は連立 1 次方程式の解法であるガウスの消去法や行列式の計算に用いられる。

21.6 行列式と線型独立

2×2 行列$\boldsymbol{A}$の成分から作られるスカラー量

$$D(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{21.36}$$

を行列式という。行列式は，3×3 以上の行列に対しては，次のように定義される。まず，行列 $\boldsymbol{A}$ から，i 行と j 列を取り除いた行列を考える。その行列の行列式を小行列式という。すなわち，

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{21.37}$$

である。これに i+j が偶数のとき正符号，奇数のとき負符号をつけたものを行列の余因子という。

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{21.38}$$

である。このときの行列式は，

$$D(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{21.39}$$

である。3×3 行列の余因子は 2×2 行列の行列式となるので，n の大きな行列でも次々に余因子を計算していけば計算することができる。$\boldsymbol{A}$ の行列式が 0 ではない値を持つとき，$\boldsymbol{A}$ を正則行列という。

ところで，行基本操作を行っても行列式の値は不変である（証明は別紙の通り）。したがって，行列式と行列について次のように言うことができる。(21.39)から，行列式が 0 となる行列は，行基本操作を行うと，1 つ以上の行がすべて 0 になる行列である。これは，1 つ以上の行が他の行のスカラー倍の和によって表すことができることを意味している。n 次元のベクトルが n - 1 個のベクトルのスカラー倍の和によって表すことが可能なとき，そのベクトルの組を線型従属であるという。そうでないときは，線型独立であるという。すなわち，正則行列はすべての行ベクトルが線型独立な行列である。

21.8 逆行列

行列 $\boldsymbol{A}$ との積を取り，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{21.41}$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{A}^{-1}$ を $\boldsymbol{A}$ の逆行列という。スカラーにおける逆数に対応する行列である。$\boldsymbol{A}$ を 2×2 行列とすると，$\boldsymbol{A}$ の逆行列は，(21.41)から

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{21.42}$$

と計算することができる。一般には,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{21.43}$$

と書くことができる。したがって, 逆行列を持つ行列は, 正則行列でなければならない。一方, 零因子は, 逆行列を持たないので, その行列式は 0 であることがわかる。つまり，零因子は正則ではない。ただし，すべての非正則行列の積が $\boldsymbol{O}$ になるわけではない。積の行列の要素は $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルと，$\boldsymbol{B}$ の列ベクトルの内積であることから，どちらかが零ベクトルでない場合，直交していなければならないことがわかる。

逆行列が転置行列である実行列，すなわち，

$$\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}^{-1} \tag{21.44}$$

を満たす行列 $\boldsymbol{A}$ を直交行列という。直交行列の２つの列ベクトルの内積は 0，すなわち直行している。なぜなら，(21.44)より，

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{ij}=\boldsymbol{a}_{i}\cdot\boldsymbol{a}_{j}^{T}=\delta_{ij} \tag{21.45}$$

が成り立つからである。

21.9 連立 1 次方程式

連立 1 次方程式

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{gathered} \tag{21.51}$$

は行列を用いて書くことができる。すなわち,，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{21.52}$$

である。ベクトル表記を用いると，

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{21.53}$$

である。ここで，を係数行列という。このとき，解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{21.54}$$

より求められる。右辺が零ベクトルとなる連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ax} = 0 \tag{21.55}$$

を同時連立 1 次方程式という。(21.30)が自明な解

$$\boldsymbol{x} = 0 \tag{21.56}$$

以外の解を持つためには,

$$D = 0 \tag{21.57}$$

でなくてはならない。このとき，すべての方程式は独立ではない。また，解は一義的でなく，無数の解を持つことになる。

連立 1 次方程式を解く公式として，クラメルの公式がある。クラメルの公式は行列式を計算することにより解を求める。i 番目の解は

$$x_i = \frac{D_i}{D} \tag{21.58}$$

である，ここで，は $\boldsymbol{A}$ の i 列ベクトルを右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列の行列式

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{21.59}$$

である。クラメルの公式の計算量は，元数が多いときに膨大になるので，大規模な連立 1 次方程式に用いられることはない。

一般に, 連立 1 次方程式の解はガウスの消去法によって解かれる。ガウスの消去法は, 係数行列 $\boldsymbol{A}$ に対して行基本操作を繰り返して, 行列の対角要素より下の部分 (下三角部分) にある要素がすべて 0 の行列，すなわち，

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1n-1} & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \tag{21.60}$$

になるように変形する方法である。$\boldsymbol{U}$ のような行列を上三角行列という。また，行基本操作を行っても行列式の値は変わらないことから，$\boldsymbol{A}$ の行列式は $\boldsymbol{U}$ の対角要素の積から求めることができる。

実際のガウスの消去法の計算では，変形の過程で 1 行目から n - 1 行目までを，それ

ぞれの行を対角要素 u_{ii} で割ってゆくので，対角要素は自動的に 1 となる。すなわち，

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & u'_{12} & \cdots & u'_{1n-1} & u'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u'_{2n-1} & u'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u'_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \tag{21.61}$$

とする。このような変形を行うことで，解が x_n から x_1 へ順に求められる。消去を行う操作は，$\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}' \tag{21.62}$$

に分解し，

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{21.63}$$

とすることと同等である。ここで，$\boldsymbol{L}$ は上三角部分の要素が 0 の下三角行列である。このため，ガウスの消去法は LU 分解法とよばれることもある。実際には，$\boldsymbol{L}$ を求める計算は必要なく，下三角部分を消去する操作によって，直接 $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{b}$ が求められる。

21.10 固有値・固有ベクトル

正方行列 $\boldsymbol{A}$ には,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{21.65}$$

となるスカラーλとベクトル $\boldsymbol{v}$ の組み合わせが存在する。このとき，λを $\boldsymbol{A}$ の固有値，$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルという。を変形すると,

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = 0 \tag{21.66}$$

となるので，同次連立 1 次方程式である。この式が解を持つ条件は行列式が 0 となることである。すなわち，

$$D\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right) = \left|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right| = 0 \tag{21.67}$$

である。この式は固有方程式あるいは特性方程式とよばれる。この式は n 次方程式となるので，これを解くことにより，λが求められる。

ここで，すべての固有方程式が重根を持たず，固有値すべてが異なる場合を考える。このとき，(21.65)をまとめて書くと，

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \tag{21.68}$$

左辺の括弧は n 個の固有ベクトルを列ベクトルにして作る行列

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^1 & \cdots & \boldsymbol{v}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} \tag{21.69}$$

である。また，固有値を対角要素として持つ行列を$\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{21.70}$$

とする。このとき，(21.68)は

$$\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{V\Lambda}$$

とかける。(21.68)の左からの逆行列

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix} \tag{21.71}$$

をかけると，

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{AV} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V\Lambda} = \boldsymbol{I\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{21.72}$$

となって，$\boldsymbol{\Lambda}$が得られ，対角要素だけの行列に変換される。これを行列の対角化という。

次に，$\boldsymbol{A}$ が対称行列である場合を考える。i 番目と j 番目の固有値に対して，

$$\boldsymbol{Av}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i \tag{21.73}$$

$$\boldsymbol{Av}_j = \lambda_j\boldsymbol{v}_j \tag{21.74}$$

が成り立つ。ここで，(21.74)の転置をとると，

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j\right)^T = \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{A} = \lambda_j \boldsymbol{v}_j^T \tag{21.75}$$

である。ここで，(21.73)に $\boldsymbol{v}_j$ の転置を左側から，(21.75)に $\boldsymbol{v}_j$ を右側からかけると，それぞれ，

$$\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j^T \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i \tag{21.76}$$

$$\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_j \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i \tag{21.77}$$

となる。ただし，(21.76) (21.77)において同じ添字でも総和をとらない。(21.76)と(21.77)の差をとると，

$$0 = \lambda_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i - \lambda_j \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \left(\lambda_i - \lambda_j\right) \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i \tag{21.78}$$

となり，２つの固有値が異なるときには,

$$\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = 0$$

が成り立つ。すなわち，列ベクトルが互いに直交である，すなわち，$\boldsymbol{V}$ が直交行列

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^T \tag{21.79}$$

であることを示し，対称行列は直交行列により対角化されることを意味している。行列式が 1 の直交行列は後で見るように回転の座標変換を表しており, 応力のように対称行列（対称２階テンソル）で表される物理量は座標変換により対角化できることを意味している。

２次形式

$$Q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{21.80}$$

の $\boldsymbol{x}$ を次の $\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}$ で置き換える。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{y} \tag{21.81}$$

ここで，$\boldsymbol{V}$ は A の固有ベクトルから作られる行列である。すると，

$$Q = \left(\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} \tag{21.82}$$

が得られる。(21.82)を２次形式の標準形という。ここで，$\boldsymbol{\Lambda}$は対角行列である。

21.6 固有値・固有ベクトルの応用

図 21.1 のように２つの重りがバネで連結されている状態を考える。このような重りとバネが複数ある系で起きる振動を連成振動という。ここで,

$$m_1 = m_2 = m \tag{21.86}$$

$$k_1 = k_3 \tag{21.87}$$

であるときの運動を考える。２つの重りの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 - k_2\left(x_1 - x_2\right) \tag{21.88}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2\left(x_2 - x_1\right) - k_1x_2 \tag{21.89}$$

これらの式は連立２階常微分方程式である。ここで，

$$X_1 = x_1 + x_2 \tag{21.90}$$

$$X_2 = x_1 - x_2 \tag{21.91}$$

とおいて，(21.83)と(21.84)の和と差を作ることにより，

$$m\frac{d^2X_1}{dt^2} = -k_1X_1 \tag{21.92}$$

$$m\frac{d^2X_2}{dt^2} = -\left(k_1 + 2k_2\right)X_2 \tag{21.93}$$

２つの独立した微分方程式を作ることができる。

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \tag{21.94}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} \tag{21.95}$$

とおくと，

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} = -\Omega_1^2X_1 \tag{21.96}$$

$$\frac{d^2X_2}{dt^2} = -\Omega_2^2X_2 \tag{21.97}$$

となり，その一般解は

$$X_1 = A\cos\left[\Omega_1 t + \phi_1\right] \tag{21.98}$$

$$X_2 = B\cos\left[\Omega_2 t + \phi_2\right] \tag{21.99}$$

である。ただし，A, B は任意定数であり，初期条件などから決まる。よって，

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(X_1 - X_2\right) = \frac{1}{2}\left(A\cos\left[\Omega_1 t + \phi_1\right] - B\cos\left[\Omega_2 t + \phi_2\right]\right) \tag{21.100}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right) = \frac{1}{2}\left(A\cos\left[\Omega_1 t + \phi_1\right] + B\cos\left[\Omega_2 t + \phi_2\right]\right) \tag{21.101}$$

となる。

(21.88)と(21.89)を少し書き換えると，

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)x_1 + \omega_2^2 x_2 \tag{21.102}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_1 - \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)x_2 \tag{21.103}$$

となる。ただし，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \tag{21.104}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \tag{21.105}$$

ここで，行列表記を用いると，

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = -\omega_2^2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{21.106}$$

ただし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{21.107}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 & -1 \\ -1 & 1+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\Omega & -1 \\ -1 & 1+\Omega \end{pmatrix} \tag{21.108}$$

ここで,

$$\Omega=\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \tag{21.109}$$

も利用した。$\boldsymbol{V}$を直交行列として,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{q} \tag{21.110}$$

と書けるとする。(21.106)は

$$\boldsymbol{V}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{q}=-\omega_2^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{q} \tag{21.111}$$

となり,左から$\boldsymbol{V}$の転置行列$\boldsymbol{V}^T$をかけると

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{q}=-\omega_2^2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{q} \tag{21.112}$$

と書ける。よって,$\boldsymbol{V}$が$\boldsymbol{A}$の固有ベクトル$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$から作られる行列

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^1 & \boldsymbol{v}^2 \end{pmatrix} \tag{21.113}$$

であれば,$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}$は対角行列となる。$\boldsymbol{A}$の固有値は,固有方程式

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\begin{vmatrix} 1+\Omega-\lambda & -1 \\ -1 & 1+\Omega-\lambda \end{vmatrix} \tag{21.114}$$

より求めることができる。上式より,

$$\left(1+\Omega-\lambda\right)^2-1=0 \tag{21.115}$$

$$\lambda^2-\left(2+2\Omega\right)\lambda+2\Omega+\Omega^2=0 \tag{21.116}$$

$$\left(\lambda-\Omega\right)\left[\lambda-\left(2+\Omega\right)\right]=0 \tag{21.117}$$

よって,固有値λ_1, λ_2は,

$$\lambda_1 = \Omega = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \tag{21.118}$$

$$\lambda_2 = 2 + \Omega = 2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \tag{21.119}$$

である。固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 1+\Omega-\lambda & -1 \\ -1 & 1+\Omega-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21.120}$$

より，λ_1のとき,

$$\boldsymbol{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21.121}$$

λ_2のとき,

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{21.122}$$

である。よって,

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^1 & \boldsymbol{v}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{21.123}$$

と求められる。

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\Omega & -1 \\ -1 & 1+\Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{21.124}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Omega & \Omega \\ 2+\Omega & -2-\Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\Omega & 0 \\ 0 & 4+2\Omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 2+\Omega \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 2+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{21.125}
$$

となる。このとき，(21.105)は

$$
\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = -\omega_2^2 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 2+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{21.126}
$$

$$
\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2+2\omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{21.127}
$$

となる。ここで，

$$
\Omega_1 = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \tag{21.128}
$$

$$
\Omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} \tag{21.129}
$$

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{21.130}
$$

とおけば，(21.120)は(21.89) (21.90)に一致する。

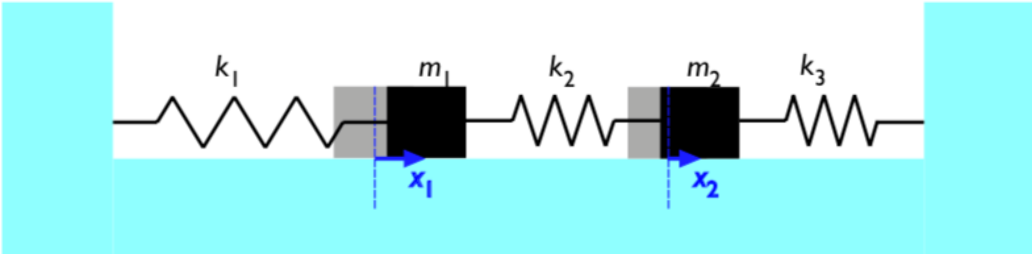

図 21.1 連成振動

21.11 座標変換と行列

古典物理学で座標変換といえば，並進と回転である。ここでは，座標系の回転による回転変換を考える。まず，2 次元を考え，図 21.2 のように座標を回転した場合を考える。ここで，回転の角度はθとする。つまり，

$$\theta = \angle x'x = \angle y'y \tag{21.131}$$

である。ここで，回転後の基本ベクトルが元の座標系からみて

$$\boldsymbol{i}' = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{12}\boldsymbol{j} \tag{21.132}$$

$$\boldsymbol{j}' = a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j} \tag{21.133}$$

と書けるとすると，係数は

$$a_{11} = a_{22} = \cos\theta \tag{21.134}$$

$$a_{12} = \sin\theta \tag{21.135}$$

$$a_{21} = -\sin\theta = -a_{12} \tag{21.136}$$

である。また，

$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i} = a_{11} \tag{21.137}$$

$$\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j} = a_{22} \tag{21.138}$$

も成り立つ。ここで，行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{21.139}$$

を用いると，(21.132)と(21.133)はまとめて，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \tag{21.140}$$

と表すことができる。ここで，$\boldsymbol{A}$ の成分はすべて独立ではない。

$$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}'=1 \tag{21.141}$$

$$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}'=0 \tag{21.142}$$

より，拘束条件，

$$a_{11}^2+a_{12}^2=1 \tag{21.143}$$

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0 \tag{21.144}$$

まとめると，

$$\sum_{k=1}^{2}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij} \tag{21.145}$$

が必要である。つまり，$\boldsymbol{A}$ は直交行列であり，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\boldsymbol{I} \tag{21.146}$$

が成り立つ。

　つぎに，位置ベクトルの変換を考える。一般のベクトルも位置ベクトルと同様に変換される。位置ベクトルは，回転前の座標から見ると，

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \tag{21.147}$$

と表される。このとき，基本ベクトルを回転後の座標で表すと，

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=x\left(a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'\right)+y\left(a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'\right) \tag{21.148}$$

$$=a_{11}x\boldsymbol{i}'+a_{12}y\boldsymbol{i}'+a_{21}x\boldsymbol{j}'+a_{22}y\boldsymbol{j}'$$

$$=\left(a_{11}x+a_{12}y\right)\boldsymbol{i}'+\left(a_{21}x+a_{22}y\right)\boldsymbol{j}' \tag{21.149}$$

$$= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' \tag{21.150}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{21.151}$$

と変換されることがわかる。

　３次元の場合でも同様に,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \tag{21.152}$$

と表される。成分の意味は,

$$a_{11} = \cos\angle x'x \tag{21.153}$$

$$a_{jk} = \cos\angle x'_j x_k \tag{21.154}$$

である。ベクトルの変換は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{23} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{21.155}$$

で表される。このような座標変換をする量がベクトルである，と定義することも可能である。

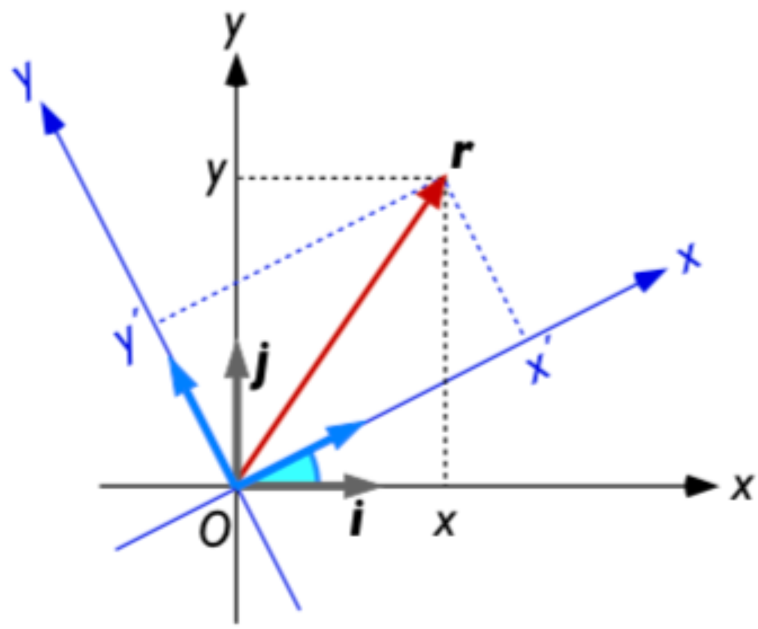

図 21.2 回転変換

22. テンソル

テンソルは方向と大きさを持つ量であり，その最も簡単な1つの方向を持つ量がベクトルである。より複雑なテンソルはベクトルの直積を成分とする量として定義される。かけ合わせるベクトルの個数をテンソルの階数という。テンソルの階数は添字の個数と同じである。言い換えると，ベクトルは1階テンソルである。

22.1 2階テンソル

2階テンソルは2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の直積からつくられる。すなわち，その成分は

$$T_{ij} = a_i b_j \tag{22.1}$$

である。ベクトル表示では，

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{22.2}$$

と表すことができる。ここで，総和記号は省略している。なお，

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j^T \tag{22.3}$$

は基本ベクトル2つから作られる2階テンソルである。たとえば，

$$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.4}$$

$$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.5}$$

などである。2階のテンソルは行列と同じように2つの添え字を持つ。したがって，$m = n\ (= 3)$の行列は2階のテンソルそのものであると言える。

22.2 クロネッカーのデルタ

2階テンソルの基本テンソルはクロネッカー (Kronecker) のデルタである。クロネッカーのデルタδ_{ij}で表される。i と j とが等しいとき1，ことなるとき0となるテンソルである。すなわち，

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i \neq j) \tag{22.6}$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i = j) \tag{22.7}$$

である。行列として表すと，基本行列 I と同じである。つまり，

$$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{22.8}$$

である。

22.3 交代記号

次の３階テンソル ε_{ijk} を交代記号という。レヴィ・ティヴィタの記号・エディントンの記号ともいう。３階テンソルなので，３つの添字をもつ。添字の３つがすべて異なるとき，その順序によって，1 または-1 を成分として持つ。３つの添字のどれか２つ以上が同じ場合には 0 となるテンソルである。すなわち，

$$\varepsilon_{ijk}=1 \quad (i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \tag{22.9}$$

$$\varepsilon_{ijk}=-1 \quad (i,j,k)=(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \tag{22.10}$$

$$\varepsilon_{ijk}=0 \quad \text{上記以外} \tag{22.11}$$

あるいは,

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1 \tag{22.12}$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1 \tag{22.13}$$

$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{112}=\varepsilon_{113}=\varepsilon_{121}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{131}=\varepsilon_{133}=\varepsilon_{211}=\varepsilon_{212}=\varepsilon_{221}=\varepsilon_{222}$$

$$=\varepsilon_{223}=\varepsilon_{232}=\varepsilon_{233}=\varepsilon_{311}=\varepsilon_{313}=\varepsilon_{322}=\varepsilon_{323}=\varepsilon_{331}=\varepsilon_{332}=\varepsilon_{333}=0 \tag{22.14}$$

である。

ベクトルの外積

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{22.15}$$

の成分は交代記号を用いると，次のように書くことができる。

$$c_i=\varepsilon_{ijk}a_j b_k \tag{22.16}$$

22.4 テンソルの内積

ベクトルと同様，２階以上のテンソルも内積が定義できる。ただし，総和をとる添字

が２つ以上あるので，総和をとる回数，積の順序により，結果が変わってくる。２階テンソル２つの場合，２回総和をとりスカラーを得る場合が ２通り，１回総和をとり，２階テンソルを得る場合，積の順序により２通り考えられる。後者は行列の積と同様の計算を行う。

$$r = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij} U_{ij} = T_{ij} U_{ij} \tag{22.21}$$

$$s = \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij} U_{ji} = T_{ij} U_{ji} \tag{22.22}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U} \tag{22.23}$$

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} U_{kj} = T_{ik} U_{kj} \tag{22.24}$$

以降では，総和記号は省略する。

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{T} \tag{22.25}$$

$$Q_{ij} = U_{ik} T_{kj} = T_{kj} U_{ik} \tag{22.26}$$

ベクトルと２階テンソルの内積は，結果としてベクトルが得られる。この場合にも積の順序により２通り存在する。

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \tag{22.27}$$

$$a_i = T_{ik} v_k \tag{22.28}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T} \tag{22.29}$$

$$b_i = v_k T_{ki} \tag{22.30}$$

22.5 ベクトルの勾配

スカラー関数fと同様，ナブラ演算子と作用させてベクトルの勾配を作ることができる。スカラー関数の場合には，

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \right) f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3 \tag{22.31}$$

のように添字が１つ増えてベクトルとなる。ベクトル関数に作用させる場合には，直積をとることになり，２階テンソルとなる。この場合，ベクトル関数の前後どちらから作

用させるかによって添字が入れ替わる。前から作用させる場合，

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \right) \left(v_j \boldsymbol{e}_j \right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{22.32}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{v} \right)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{22.33}$$

であり，後ろから作用させる場合は，

$$\boldsymbol{v} \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j \right) \left(v_i \boldsymbol{e}_i \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i \tag{22.34}$$

$$\left(\boldsymbol{v} \nabla \right)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

である。

　流速 $\boldsymbol{v}$ に後ろからナブラ演算子を作用させて作ったテンソル $\boldsymbol{F}$

$$F_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{22.35}$$

を速度勾配テンソルといい，速度の空間変化率を表す。

22.6 対称テンソル・反対称テンソルと軸ベクトル

　２階テンソルで２つの添字を交換しても等しいテンソルを対称テンソルという。すなわち，成分が

$$S_{ij} = S_{ji} \tag{22.41}$$

となっているテンソル $\boldsymbol{S}$ である。添字を交換して負符号をつけたものに等しいテンソル A を反対称テンソルという。

$$A_{ij} = -A_{ji} \tag{22.42}$$

この場合，対角成分がすべて 0 となっていなければならない。

　すべてのテンソルは対称テンソルと反対称テンソル２つの和

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{22.43}$$

に分解できる。ここで，

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{jk}\right) \tag{22.44}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{jk}\right) \tag{22.45}$$

である。速度勾配テンソルを分解して，

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{22.46}$$

$$= D_{ij} + W_{ij} \tag{22.47}$$

とした対称部分が歪速度テンソル，反対称部分が回転速度テンソルである。前にも議論したが，歪速度テンソルは局所的な単位長さあたりの伸縮速度，回転速度テンソルは局所的な剛体回転速度を表す。局所回転速度ベクトル(渦度$\boldsymbol{\zeta}$の 1/2)$\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v} \tag{22.48}$$

を用いると，

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.49}$$

となっていることがわかる。交代記号を用いると，

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{22.50}$$

と表される。このような反対称テンソルの性質を持つベクトルは軸ベクトルとよばれる。

$\boldsymbol{v}$を剛体の回転速度，$\boldsymbol{\omega}$を回転角速度とする。このとき，$\boldsymbol{v}$は$\boldsymbol{\omega}$と動径ベクトル$\boldsymbol{r}$との外積で表されることから，回転速度テンソルと位置ベクトルの内積として表すことができることがわかる。すなわち，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{W} \tag{22.51}$$

である。成分で書くと，

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{22.52}$$

であり，(22.16)を用いると，

$$v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j r_k = W_{ik} r_k \tag{22.53}$$

となっている。

22.7 テンソルの発散

ベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ と同様にテンソル関数 $\boldsymbol{T}$ とナブラ演算子と内積をとることにより，テンソルの発散を定義することができる。テンソルの階数は 1 つ下がり，２階テンソルの発散はベクトルとなる。テンソルの内積と同様，ナブラ演算子を前後どちらから作用させるかによって結果が異なる。前から作用させる場合，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\right)\cdot\left(T_{ki}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i\right)=\frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \tag{22.61}$$

$$\left(\nabla\cdot\boldsymbol{T}\right)_i=\frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} \tag{22.62}$$

となる。後ろから演算する場合は，

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla=\left(T_{ik}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\right)=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \tag{22.63}$$

$$\left(\boldsymbol{T}\cdot\nabla\right)_i=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{22.64}$$

である。(22.63) (22.64) は連続体のコーシーの運動方程式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{f} \tag{22.65}$$

の右辺第 1 項に現れる（応力テンソルを添字 i が力の方向を表すと定義した場合）。この項は変形にともなう物体内部の応力による力を表す。

22.8 テンソル関数の積分の変換

ベクトル関数のガウスの定理は，ベクトル表記と成分表記の両方で書くと，

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,dS=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,dV \tag{22.71}$$

$$\oiint_S v_i n_i\,dS=\iiint_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i}dV \tag{22.72}$$

である。スカラーや２階以上のテンソルについても同様の変換を考えることができる。スカラー関数については，

$$\oiint_S f\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \nabla f\,dV \tag{22.73}$$

$$\oiint_S f n_i\,dS = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dV \tag{22.74}$$

である。２階テンソルについては，前あるいは後ろからナブラ演算子をさせると，

$$\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{T}\,dV \tag{22.75}$$

$$\oiint_S n_i T_{ij}\,dS = \iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\,dV \tag{22.76}$$

あるいは，

$$\oiint_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \boldsymbol{T}\cdot\nabla\,dV \tag{22.77}$$

$$\oiint_S T_{ij} n_j\,dS = \iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,dV \tag{22.78}$$

と表すことができる。

　ベクトル関数のストークスの定理は，同様な表記法で，

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}ds = \iint_S \left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{22.79}$$

$$\oint_C v_i t_i ds = \iint_S \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} n_i dS \tag{22.80}$$

と書くことができる。

22.8 テンソルの回転変換

　ベクトル，すなわち，１階テンソルの回転変換は，$\boldsymbol{A}$ を回転変換テンソル(行列)として，

$$v_i' = A_{ij} v_j \tag{22.81}$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{22.82}$$

と表される。２階テンソルは２つのベクトルの直積から作られるので，その変換は回転変換テンソルを２回作用させることにより得られる。すなわち，

$$T_{ij}' = A_{ik} A_{mj} T_{km} = A_{ik} T_{km} A_{mj} \tag{22.83}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{22.84}$$

である。行列表記で，

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^T \tag{22.85}$$

とするとの同じである。ベクトルと同様，このような座標変換をする量がテンソルであると定義することもできる。

22.8 テンソルの回転変換の例

２次元の２階テンソルの回転変換による対角化を考える。ここでは，応力テンソル $\boldsymbol{T}$ について考える。なお，ここでの議論は連続体力学の習慣に従って，伸張応力を正値としていることに注意せよ (岩石力学では通常圧縮を正)。対角化した後のテンソルは行列の固有値であるので，固有方程式より，

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \left(T_{11}-\lambda\right)\left(T_{22}-\lambda\right) - T_{12}^2$$

$$= \lambda^2 - \left(T_{11}+T_{22}\right)\lambda + T_{11}T_{22} - T_{12}^2 = 0 \tag{22.81}$$

を満たす。(22.81)を解くと，

$$\lambda = \frac{T_{11}+T_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(T_{11}-T_{22}\right)^2}{4} - T_{12}^2} \tag{22.82}$$

と求められる。よって，対角化した後の応力テンソル $\boldsymbol{T}'$ の成分は

$$T_1 = T'_{11} = \frac{T_{11}+T_{22}}{2} + \sqrt{\frac{\left(T_{11}-T_{22}\right)^2}{4} - T_{12}^2} \tag{22.83}$$

$$T_2 = T'_{22} = \frac{T_{11}+T_{22}}{2} - \sqrt{\frac{\left(T_{11}-T_{22}\right)^2}{4} - T_{12}^2} \tag{22.84}$$

である。T_1 を最大主応力，T_2 を最小主応力という。これらは，回転行列を用いて求めることもできる。(21.139)より，

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{22.85}$$

$$=\begin{pmatrix} T_{11}\cos^2\theta+T_{22}\sin^2\theta+T_{12}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\left(T_{22}-T_{11}\right)\sin 2\theta+T_{12}\cos 2\theta \\ \frac{1}{2}\left(T_{22}-T_{11}\right)\sin 2\theta+T_{12}\cos 2\theta & T_{11}\sin^2\theta+T_{22}\cos^2\theta-T_{12}\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

…(22.86)

となる。

$$\frac{1}{2}\left(T_{22}-T_{11}\right)\sin 2\theta+T_{12}\cos 2\theta=0 \tag{22.87}$$

なので，2θは，

$$\tan 2\theta=\frac{2T_{12}}{T_{22}-T_{11}} \tag{22.88}$$

あるいは，

$$\cos 2\theta=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}=\pm\frac{T_{22}-T_{11}}{\sqrt{\left(T_{11}-T_{22}\right)^2-4T_{12}^2}} \tag{22.89}$$

を満たす。(22.86)の T_1 成分を少し変形して，

$$T_1=T_{11}\cos^2\theta+T_{22}\sin^2\theta+T_{12}\sin 2\theta$$

$$=T_{11}\frac{1+\cos 2\theta}{2}+T_{22}\frac{1-\cos 2\theta}{2}+T_{12}\sin 2\theta$$

$$=\frac{T_{11}+T_{22}}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\left(T_{11}-T_{22}+2T_{12}\tan 2\theta\right) \tag{22.90}$$

となり，これに(22.88) (22.89)を代入すると，(22.83)が得られる。応力テンソルが対角化できるということは，応力の本質が物質を伸縮変形させるように働いている力であることを意味している。

図 22.1 のように主応力の方向が座標軸と一致している場合を考える。つまり，

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \tag{22.91}$$

と応力が表される場合である。この応力テンソルを(22.85)に代入すると，

$$T'_{11}=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\cos 2\theta \tag{22.92}$$

$$T'_{21}=-\frac{T_1-T_2}{2}\sin 2\theta \tag{22.93}$$

が得られる。ここで，T'_{11}は単位面積当たりの垂直抗力（法線応力），T'_{21}は剪断応力である。ベクトル

$$\boldsymbol{\tau} = \left(T'_{11}, -T'_{21}\right) \tag{22.94}$$

は，中心$\boldsymbol{p}$と半径Rがそれぞれ，

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{T_1 + T_2}{2}, 0\right) \tag{22.95}$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{1}{2} T_{max} \tag{22.96}$$

の円を描く。この円をモール円とよぶ。中心の座標に負符号をつけた

$$p = -\frac{T_1 + T_2}{2} \tag{22.97}$$

は封圧，直径$2R$は最大差応力T_{max}を表す。差応力が大きくなって，モール円がクーロンの破壊条件

$$\tau_f = \tau_0 - cT'_{11} = \tau_0 - \tan\phi T'_{11} \tag{22.98}$$

に接触すると，破壊が起きると予測される。ここで，τ_0は固着強度，cは摩擦係数，ϕは摩擦角で，破断面の角度と

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2\theta \tag{22.99}$$

という関係がある。

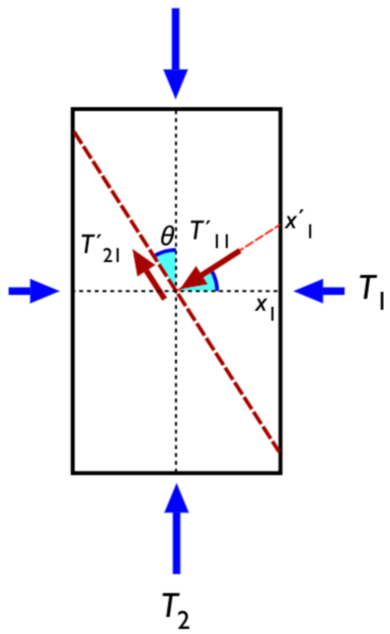

図 22.1 岩石の破壊と応力テンソルの座標変換

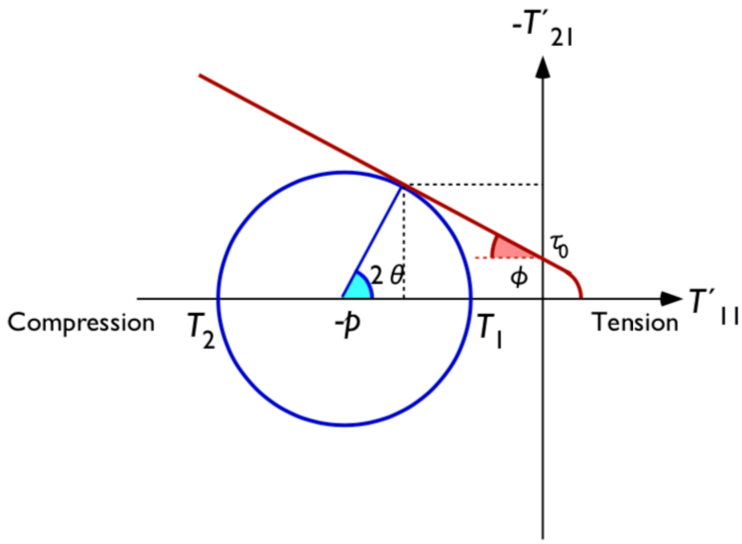

図 22.2 モール円：赤線はクーロンの破壊条件

テンソルは連続体力学の式を表記するのに便利な方法です。実際に計算するには成分を計算します。このレジュメでは，
・テンソル不変量
・極分解
については省略しました。前者はレオロジー，後者は歪の定義と関わっています。これから先へ進むには，物理数学や連続体力学の教科書を読んでください。

この講義で扱えなかった物理数学の内容に，
・特殊関数（球関数など）
・複素関数論
があります。前者は重力場や磁場などのポテンシャル論，後者は弾性波動理論などで現れます，

参考書

清水昭比古「連続体力学の話法」，森北出版，2012 年．
D. Lautrup, “Physics of Continuous Matter” Second Ed., CRC Press, 2011.
D. L. Turcotte, G. Schubert, “Geodynamics” Third Ed., Cambridge University Press, 2014.