

1 VIII. 偏微分方程式

3 18. 偏微分方程式と解析解

5 偏微分を含む微分方程式を偏微分方程式とよぶ。多くの物理量は場の関数，すなわち時
6 間および空間の関数として表される。このため，その関係を表す方程式も時間および空
7 間の偏微分の関係として表されるので，多くの物理現象を偏微分方程式として表すこと
8 ができる。

9 偏微分方程式の解は境界条件によって拘束される。境界条件によって解が特殊な形で
10 書ける場合のみに解析的に解くことができる。

11 12 18.1 変数分離法

13 解の多変数関数が1変数関数の積で表せるときには，偏微分方程式を複数の常微分方程
14 式に分けることができる。この方法を変数分離法とよぶ。例えば1次元熱伝導方程式

$$15 \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (18.1)$$

16 の解を

$$17 \quad T(x,t) = X(x)\Theta(t) \quad (18.2)$$

18 と表せるとする。これを(18.1)に代入すると

$$19 \quad X(x) \frac{d\Theta(t)}{dt} = \kappa \Theta(t) \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \quad (18.3)$$

$$20 \quad \frac{1}{\Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \kappa \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \quad (18.4)$$

21 となる。このとき，左辺と右辺の変数を動かしてもこの式が常に成立するのは，左辺と
22 右辺がそれぞれ定数のときだけである。よって，

$$23 \quad \frac{1}{\Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} = c \quad (18.5)$$

$$24 \quad \kappa \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = c \quad (18.6)$$

25 でなくてはならない。

28 **18.2 変数変換**

29 変数を別の変数に置き換えることを変数変換とよぶ。変数変換によって偏微分方程式が
30 常微分方程式に変形できることがある。熱伝導方程式において

31
$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \tag{18.11}$$

32 とする。このとき、

33
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{dT}{d\xi} = \frac{x}{2\sqrt{\kappa}} \frac{d(t^{-1/2})}{dt} \frac{dT}{d\xi} = -\frac{xt^{-3/2}}{4\sqrt{\kappa}} \frac{dT}{d\xi} \tag{18.12}$$

34
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dT}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{dT}{d\xi} \tag{18.13}$$

35
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dT}{d\xi} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dT}{d\xi} \right) = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 T}{d\xi^2} \tag{18.14}$$

36 となるので、(18.1)に代入すると

37
$$-\frac{xt^{-3/2}}{4\sqrt{\kappa}} \frac{dT}{d\xi} = \kappa \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 T}{d\xi^2} \tag{18.15}$$

38
$$-\frac{x}{\sqrt{\kappa t}} \frac{dT}{d\xi} = \frac{d^2 T}{d\xi^2} \tag{18.16}$$

39 となる。元の偏微分方程式に代入すると、変数 x, t は消えてしまい、常微分方程式

40
$$-\xi \frac{dT}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{d\xi^2} \tag{18.17}$$

41 が得られる。

42

43

44 **19. 熱伝導方程式の2つの解**

45 前章の2つの方法により熱伝導方程式の解を求める。

46

47 **19.1 プレート冷却モデル：変数分離法による解**

48 プレートモデルは熱伝導により一定の厚さのプレートの冷却を考えるモデルである。こ
49 のモデルでは両端に温度を与える、すなわち変数の値を境界条件として持つ解を求める
50 ことになる。すなわち、

51
$$T(0, t) = T_0 \tag{19.1}$$

52 $T(L,t) = T_M$ (19.2)

53 の2つの境界値を与える。初期条件は深さ0以外で一定

54 $T(z,0) = T_M$ (19.3)

55 である。プレートモデルの解は、時間が十分長く経ったときは定常解に収束することから、
56 (定常解+時間依存解)という形になっているはずである。つまり、

57 $T(z,t) = T(z,\infty) + T_1(z,t)$ (19.4)

58 である。定常解は両端の温度を固定した1次元の熱伝導であることから、深さ z に比例
59 する解

60 $T_\infty = T(z,t=\infty) = T_0 + (T_M - T_0)\frac{z}{L}$ (19.5)

61 である。時間依存解を T_1 として、これを

62 $T_1 = (T_M - T_0)T_1'(z,t)$ (19.6)

63 と書くことにする。ここで、 T_1' も熱伝導方程式の解でなければならない。 T_1' に対する
64 境界条件は

65 $T_1'(z=0,t) = 0$ (19.7)

66 $T_1'(z=L,t) = 0$ (19.8)

67 の2つである。一方初期条件は、

68 $T_1'(z,0) = \frac{L-z}{L}$ (19.9)

69 である。これは、初期の温度が深さ0以外で一定値 T_M となることから来ている。また、
70 時間が無限に経った時には T_1' は0に収束する。今、 T_1' が

71 $T_1'(z,t) = T_z(z)T_t(t)$ (19.10)

72 というように深さ z のみの関数と時間 t のみの関数の積で表せるとする。この式を熱伝
73 導方程式(1)へ代入した式、

$$74 \quad \frac{1}{\kappa} \frac{1}{T_z} \frac{\partial T_t}{\partial t} = \frac{1}{T_z} \frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} \quad (19.11)$$

75 の解は境界において 0 となることと、すべての点において 0 でない解を持つことから振
76 動的な関数でなければならないことが分かる。このため、左辺と右辺は負の一定値を持
77 つ。これを $-p^2$ で表すと、

$$78 \quad \frac{d^2 T_z}{dz^2} = -p^2 T_z \quad (19.12)$$

$$79 \quad \frac{1}{\kappa} \frac{dT_t}{dt} = -p^2 T_t \quad (19.13)$$

80 という 2 つの常微分方程式となる。(19.12)の解はフーリエ級数、

$$81 \quad T_z = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos p_n z + B_n \sin p_n z) \quad (19.14)$$

82 で表される。境界条件(19.7)(19.8)から、(19.14)は正弦級数でなければならない。つまり、

$$83 \quad A_n = 0 \quad (19.15)$$

84 である。初期条件(19.9)から、鋸歯型の波のフーリエ級数(周期 $2L$)となっていないなくては
85 ならないことが分かる。よって、

$$86 \quad T_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[\frac{n\pi z}{L} \right] \quad (19.16)$$

87 となる。ただし、

$$88 \quad p_n = \frac{n\pi}{L} \quad (19.17)$$

89 である。一方、(19.13)の解は

$$90 \quad T_t = C_n \exp[-p_n^2 \kappa t]$$

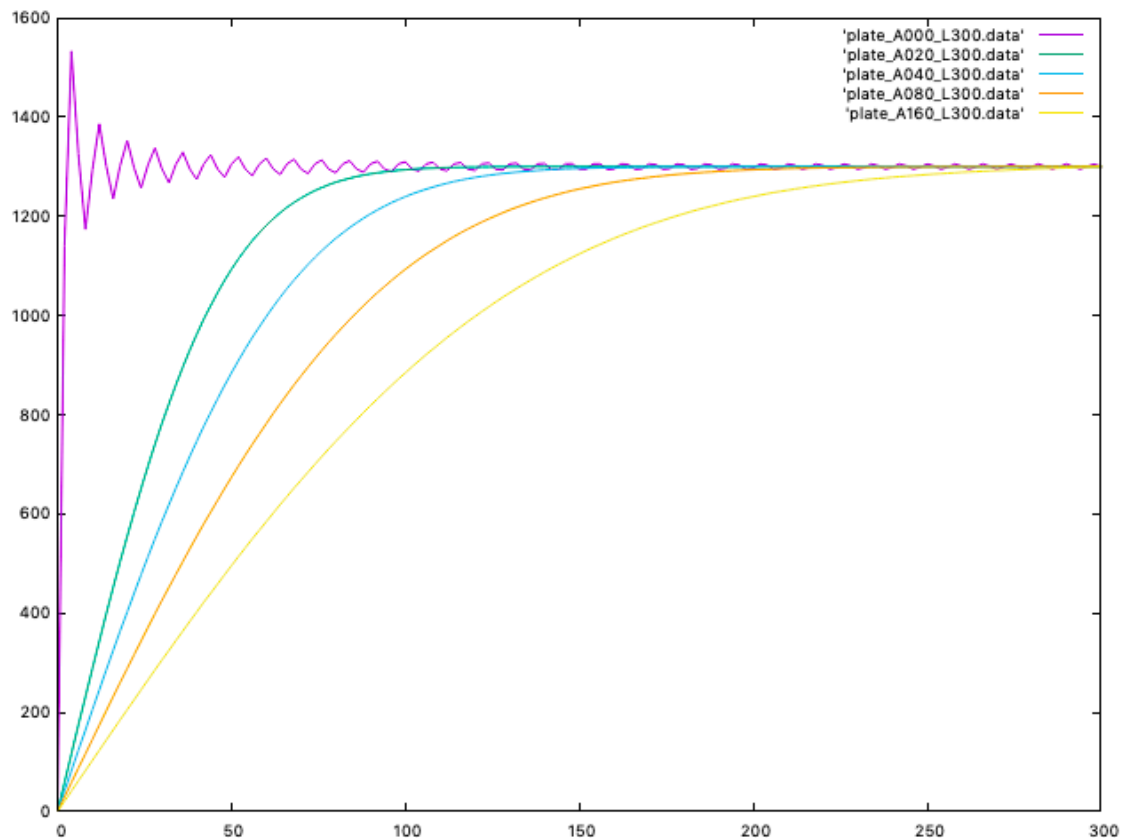
91 である。この式は時間が十分に経つと 0 に収束する。また、初期条件から、

$$92 \quad C_n = 1 \quad (19.18)$$

93 でなければならない。よって求める温度は、フーリエ級数を用いて

$$94 \quad T = T_0 + (T_M - T_0) \left[\frac{z}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[\frac{n\pi z}{L} \right] \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2 \kappa t}{L^2} \right] \right] \quad (19.19)$$

95 と求められる。有限の時間では L を十分大きく取れば、半無限体冷却モデルの解も表す
96 ことができる。下図は、(19.19)によるプレート冷却モデルの解である。0 Ma のときの解
97 には、不連続関数をフーリエ級数で表したことによるギブスの現象が見られる。



99

100 図 19.1 フーリエ級数によるプレート冷却モデルの解

101

102 19.2 半無限体冷却モデル：変数変換法による解

103 半無限体冷却モデル (Half-Space Cooling model: HSCM)は、プレートを無限に下方
 104 へ続くマントルが上面から冷却された部分であるとするモデルである。境界条件は

$$105 \quad T(z=0, t) = T_0 \quad (19.21)$$

$$106 \quad T(z=\infty, t) = T_M \quad (19.22)$$

107 であり、この条件はフーリエ級数では表すことができない。ここでは、変数変換を利用
 108 する。

$$109 \quad \phi = \frac{dT}{d\xi} \quad (19.23)$$

110 と置くと、(18.17)の解は

$$111 \quad \phi = C_1 e^{-\xi^2} \quad (19.24)$$

112 と表される。(19.23)より, この式を ξ で積分すると

113
$$T(\xi) = C_0 + C_1 \int_0^\xi e^{-\xi'^2} d\xi' \quad (19.25)$$

114 変数変換した境界条件

115
$$T(\xi = 0) = T(0, t) = T_0 \quad (19.26)$$

116
$$T(\xi = \infty) = T(\infty, t) = T_M \quad (19.27)$$

117 より,

118
$$T_0 = C_0 + C_1 \cdot 0 \quad (19.28)$$

119
$$T_M = C_0 + C_1 \int_0^\infty e^{-\xi'^2} d\xi' = T_0 + C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (19.29)$$

120 となる。よって,

121
$$C_0 = T_0 \quad (19.30)$$

122
$$C_1 = (T_M - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (19.31)$$

123 となる。すなわち, 温度は

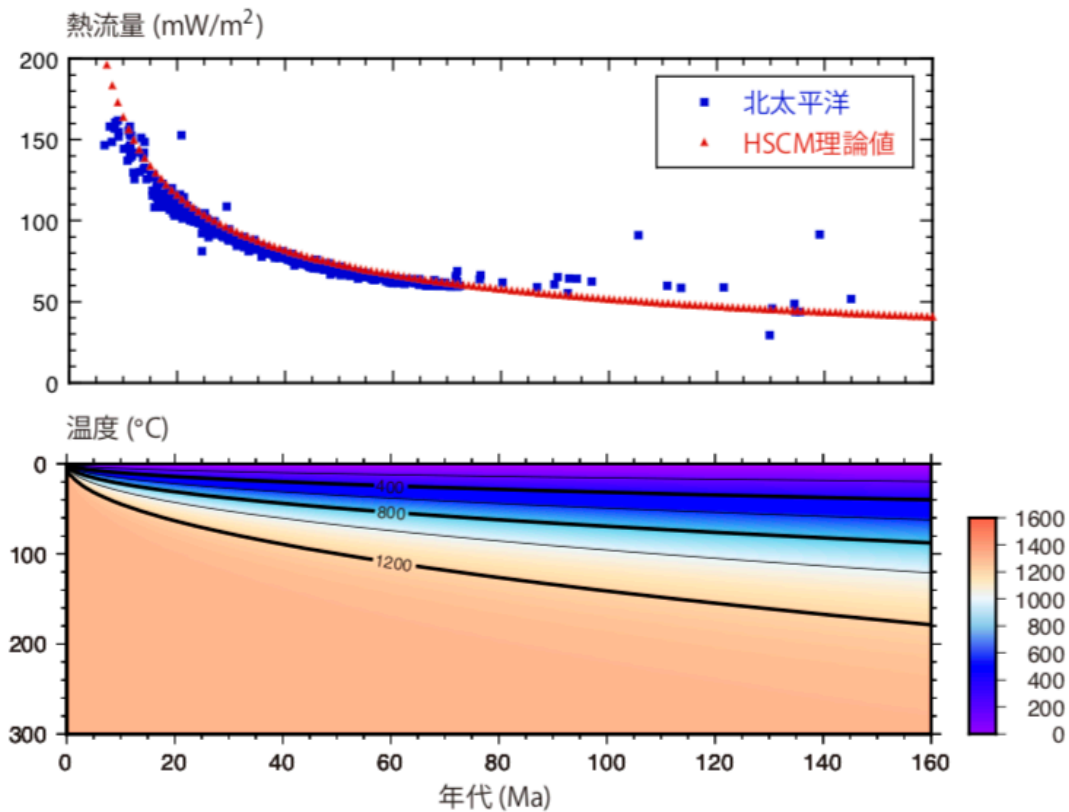
124
$$T(\xi) = T_0 + (T_M - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi'^2} d\xi' \quad (19.32)$$

125 と表される。右辺の積分の部分

126
$$\operatorname{erf}[\xi] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi'^2} d\xi' \quad (19.33)$$

127 は誤差関数とよばれる。誤差関数はガウス関数を積分した関数で, 0 から 1 までの値を
128 とる。誤差関数は ξ が無限大のときを除いて解析的に解けないので, 数値積分により求
129 める必要がある。

130



131

132 図 19.2 HSCM による地殻熱流量とプレートの温度の時間変化：地殻熱流量の観測値は
 133 Davies (2013)によるグリッドデータから作成

134

135

136 20. 酔歩運動と拡散

137 拡散とは、酔歩運動(ランダムウォーク)によって不均質が物質中に広がっていく過程
 138 である。熱伝導も原子の不規則な衝突により原子振動が拡散していく現象であり、拡散
 139 方程式と熱伝導方程式は同じ形で表すことができる。

140

141 20.1 酔歩運動とフォッカー・プランク方程式

142 粒子が δt の間に δx だけ進むとする。ここで δx はランダムに決まるとする。このよう
 143 な場合、 t における粒子の位置を決めるには $t - \delta t$ における粒子の位置情報だけが必要
 144 であり、それより前の情報は必要がない。このような過程をマルコフ過程とよぶ。粒子
 145 の密度 $f(x, t)$ を求めることを考える。ここで、粒子の密度は単に長さ辺りの粒子数とす
 146 る。時刻 $t - \delta t$ における粒子の密度が $f(x, t - \delta t)$ で与えられているとき、 $x - \delta x$ から x へ粒
 147 子が動く確率を $P(x - \delta x, x)$ とする。そのとき、 $f(x, t)$ は

148
$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\delta x, t-\delta t) P(x-\delta x, x) d(\delta x) \quad (20.1)$$

149 と表すことができる。ここで f を x, t のまわりでテイラー展開したもの

150
$$f(x-\delta x, t-\delta t) = f(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 - \dots$$

151
$$- \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2 - \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t \delta x - \dots$$
 (20.2)

152 を右辺に代入すると、

153
$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 - \dots - \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2 - \dots$$

154
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t \delta x - \dots \right] \cdot P(x-\delta x, x) d(\delta x) \quad (20.3)$$

155
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

156
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x P(x-\delta x, x) d(\delta x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

157
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} \delta t P(x-\delta x, x) d(\delta x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2 P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

158
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t \delta x P(x-\delta x, x) d(\delta x) - \dots \quad (20.4)$$

159
$$= f(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

160
$$- \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \delta x P(x-\delta x, x) d(\delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta x^2 P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

161
$$- \frac{\partial f}{\partial t} \delta t \int_{-\infty}^{\infty} P(x-\delta x, x) d(\delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2 \int_{-\infty}^{\infty} P(x-\delta x, x) d(\delta x)$$

162
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t \int_{-\infty}^{\infty} \delta x P(x-\delta x, x) d(\delta x) - \dots \quad (20.5)$$

163 となる。ここで、 $P(x-\delta x, x)$ は確率なので

164
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x-\delta x, x) d(\delta x) = 1 \quad (20.6)$$

165
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta x P(x - \delta x, x) d(\delta x) = \langle \delta x \rangle \quad (20.7)$$

166
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta x^2 P(x - \delta x, x) d(\delta x) = \langle \delta x^2 \rangle \quad (20.8)$$

167 である。それぞれ、確率の合計、平均値、分散を表す。このことに注意すると、(20.5)
168 は、

169
$$f(x, t) = f(x, t) - \langle \delta x \rangle \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2$$

170
$$+ \langle \delta x \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t + O(\delta x^3, \delta t^3) \quad (20.9)$$

171 となる。ここで高次の項を無視して、さらに移項すると

172
$$\frac{\partial f}{\partial t} \delta t = - \langle \delta x \rangle \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t^2 + \langle \delta x \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \delta t \quad (20.10)$$

173 となり、

174
$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\langle \delta x \rangle}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2 \delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t + \langle \delta x \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \quad (20.11)$$

175 が得られる。ここでも $\delta t \rightarrow 0$ とすると、 $\langle \delta x \rangle$ も 0 となるので、

176
$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\langle \delta x \rangle}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2 \delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (20.12)$$

177 が得られる。この式はフォッカー・プランク方程式(Fokker-Plank equation)とよばれ
178 る。ここで、

179
$$v = \frac{\langle \delta x \rangle}{\delta t} \quad (20.13)$$

180 は流速、

181
$$D = \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2 \delta t} \quad (20.14)$$

182 は拡散係数を表す。つまり、この式は移流拡散方程式

183
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (20.15)$$

184 を表す。左右へ動く確率が等しい、つまり、

185
$$\langle \delta x \rangle = 0 \quad (20.16)$$

186 ときには

187
$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{20.17}$$

188 となり，拡散方程式を表す。

189

190 **20.2 酔歩運動と拡散方程式の解**

191 ここでは，初期条件が原点に拡散する不均質が集中している場合を考える。この場合，
192 初期濃度はディラックのデルタ関数により，

193
$$f(x,0) = \delta(x) \tag{20.18}$$

194 と表される。拡散方程式の解は，(19.12)(19.13)より，フーリエ級数をフーリエ変換に置
195 き換えた，

196
$$f(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(p) \cos px \exp[-p^2 Dt] dp \tag{20.19}$$

197 である。ここで， $t=0$ で f がデルタ関数となるための条件は，

198
$$A(p) = 1$$

199 である。よって，

200
$$f(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos px \exp[-Dtp^2] dp \tag{20.20}$$

201 となる。ここで，17章の(17.31)より，

202
$$\int_0^\infty \exp[-ax^2] \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}\right] \tag{20.21}$$

203 を用いると，

204
$$a = Dt \tag{20.22}$$

205
$$b = x \tag{20.23}$$

206 と置き換えれば良いので，求める解は，

207
$$f(x,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \tag{20.24}$$

208 となる。

209 数値シミュレーションを行って，酔歩運動により拡散現象が再現できるか試した結果
210 が図 20.1 である。粒子は最初に原点 $x=0$ に N_0 個密集しているとする。粒子の番号を

211 i とすると、初期条件で

212
$$x_i = 0 \tag{20.25}$$

213 である。ここで $\langle \delta x^2 \rangle = 1$ となるような正規乱数を発生させ、

214
$$x_i^{n+1} = x_i^n + \delta x_i \tag{20.26}$$

215 を計算する。ただし $\delta t = 1$ とする。このとき、粒子の座標を区間 Δx に区切って区間ごと
216 の粒子数をカウントする。ところで、粒子数と拡散係数はそれぞれ、

217
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = N_0 \tag{20.27}$$

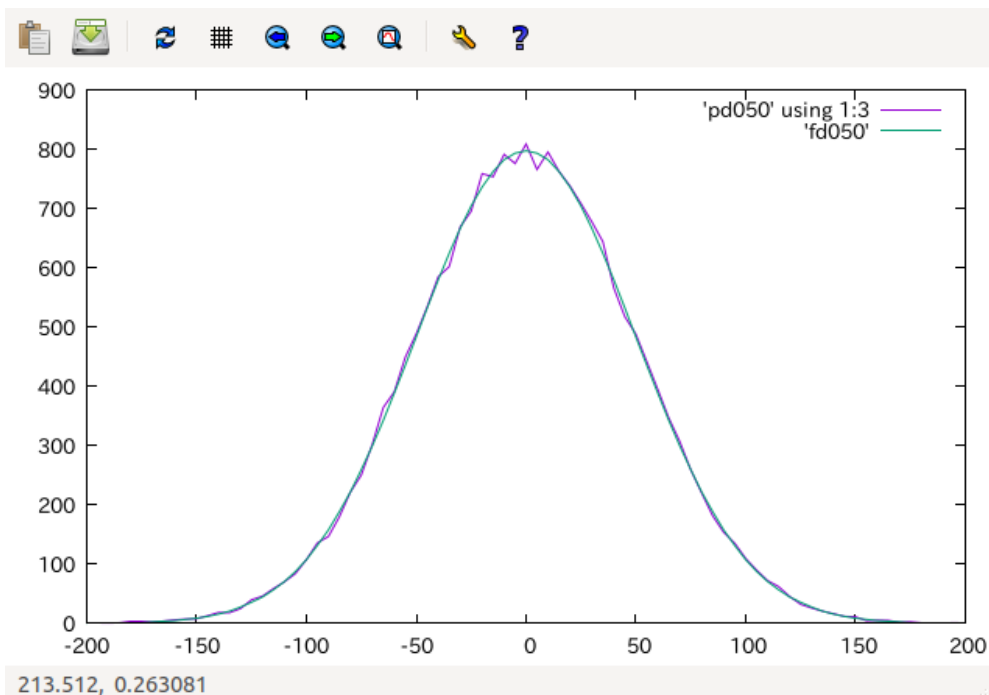
218
$$D = \frac{1}{2} \tag{20.28}$$

219 であるので、その解は

220
$$f(x, t^n) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left[-\frac{x^2}{2n}\right] \tag{20.29}$$

221 となる。ただし、 n はタイムステップを表す。この式は平均 0 分散 n の正規分布を表す。

222



224 図 20.1 ランダムウォーク粒子計算と拡散方程式の解の比較

225