VII. フーリエ級数とフーリエ変換

16．フーリエ級数

16.1 フーリエ級数

周期 T を持つ周期関数

$$f(t) = f(t+T) \tag{16.1}$$

を三角関数によって作られる級数によって表すことを考える。つまり，

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi t}{T} + a_2\cos\frac{4\pi t}{T} + a_3\cos\frac{6\pi t}{T} + \cdots \\ &\quad + b_1\sin\frac{2\pi t}{T} + b_2\sin\frac{4\pi t}{T} + b_3\sin\frac{6\pi t}{T} + \cdots \end{aligned} \tag{16.2}$$

である。この級数を**フーリエ級数**(Fourier series)と呼ぶ。

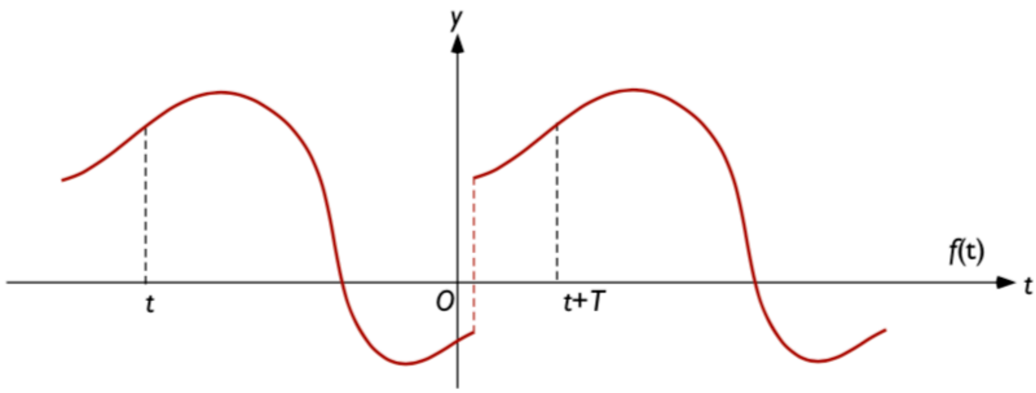

図 16.1　周期関数

16.2 フーリエ係数

フーリエ級数の係数を**フーリエ係数**と呼ぶ。フーリエ係数 a_n, b_n は以下の積分によって求めることができる。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt \tag{16.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \tag{16.4}$$

フーリエ係数がこれらの積分によって求められることは，積分の$f(x)$にフーリエ級数を代入することにより証明される。すなわち，

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{2\pi t}{T}+a_2\cos\frac{4\pi t}{T}+\cdots+a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+\cdots\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(b_1\sin\frac{2\pi t}{T}+b_2\sin\frac{4\pi t}{T}+\cdots+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}+\cdots\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a_0}{2}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}a_1\cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}a_2\cos\frac{4\pi t}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\cdots+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\cdots$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}b_1\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}b_2\sin\frac{4\pi t}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\cdots+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\cdots$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}a_n\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{4\pi nt}{T}\right)dt$$

$$=a_n\frac{1}{T}\left[t\right]_{-T/2}^{T/2}=a_n \tag{16.5}$$

となり，係数a_nと一致することが示される。正弦級数への積の項と余弦同士でも次数n以外の項は関数の周期性により消えてしまい，同じ次数の項のみが残る。b_nも同様である。

16.3 スペクトル

フーリエ係数の各次数の係数の２乗の和

$$a_n^2+b_n^2 \tag{16.6}$$

を**パワースペクトル**，その平方根をとったもの

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{16.7}$$

を**振幅スペクトル**という。

16.4 パーセバルの恒等式

関数$f(t)$がフーリエ級数で表されるとき，

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t)\right]^2 dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{16.8}$$

という関係がある。これを**パーセバルの恒等式**という。

16.5 フーリエ余弦級数・正弦級数

偶関数

$$f(t)=f(-t) \tag{16.9}$$

のフーリエ級数は余弦の項のみ和で表される級数となり，**フーリエ余弦級数**と呼ばれる。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} \tag{16.10}$$

また，奇関数

$$f(t)=-f(-t) \tag{16.11}$$

のフーリエ級数は正弦の項のみ和で表される級数となり，**フーリエ正弦級数**と呼ぶ。

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nt}{T} \tag{16.12}$$

16.6 フーリエ級数の例

関数f(t)が周期2πの矩形波を表すとする。すなわち，

$$\begin{aligned}&f(t)=-1\quad(-\pi\le t\le 0)\\&f(t)=1\quad(0\le t\le\pi)\end{aligned} \tag{16.13}$$

である。このとき，f(t)をフーリエ級数で表すことを考える。

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nt\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_{0}^{\pi}=0\end{aligned} \tag{16.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \tag{16.15}$$

は奇関数であるので，余弦関数の係数が 0 となっている。また，正弦関数の係数も偶数のとき，0 になっていることに注意しよう。よって，矩形波 f(t)のフーリエ級数は展開すると，

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right) \tag{16.16}$$

である。関数に不連続があると，不連続部分に振動が現れ，次数を大きくしても振動がなくなることはない。これを**ギブスの現象**と呼ぶ。

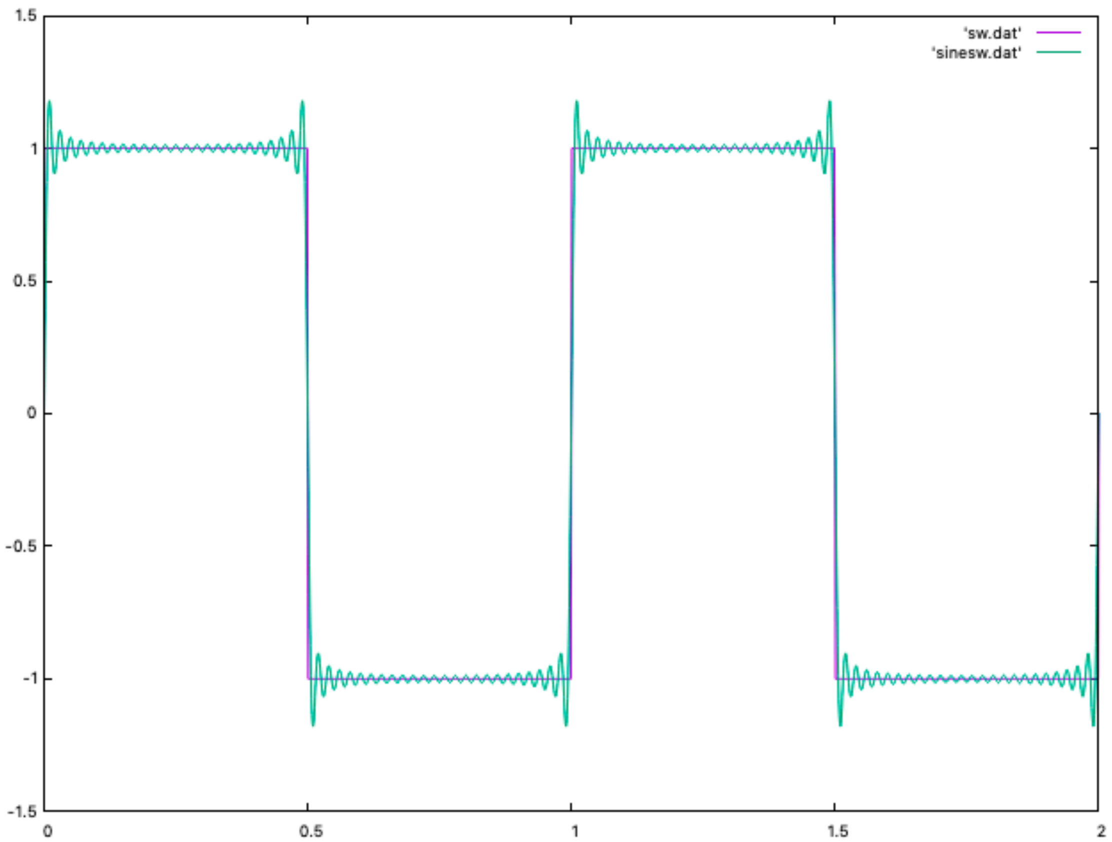

図 16.2　矩形波とそのフーリエ級数 (49 次)による再現：ギブスの現象が見られる

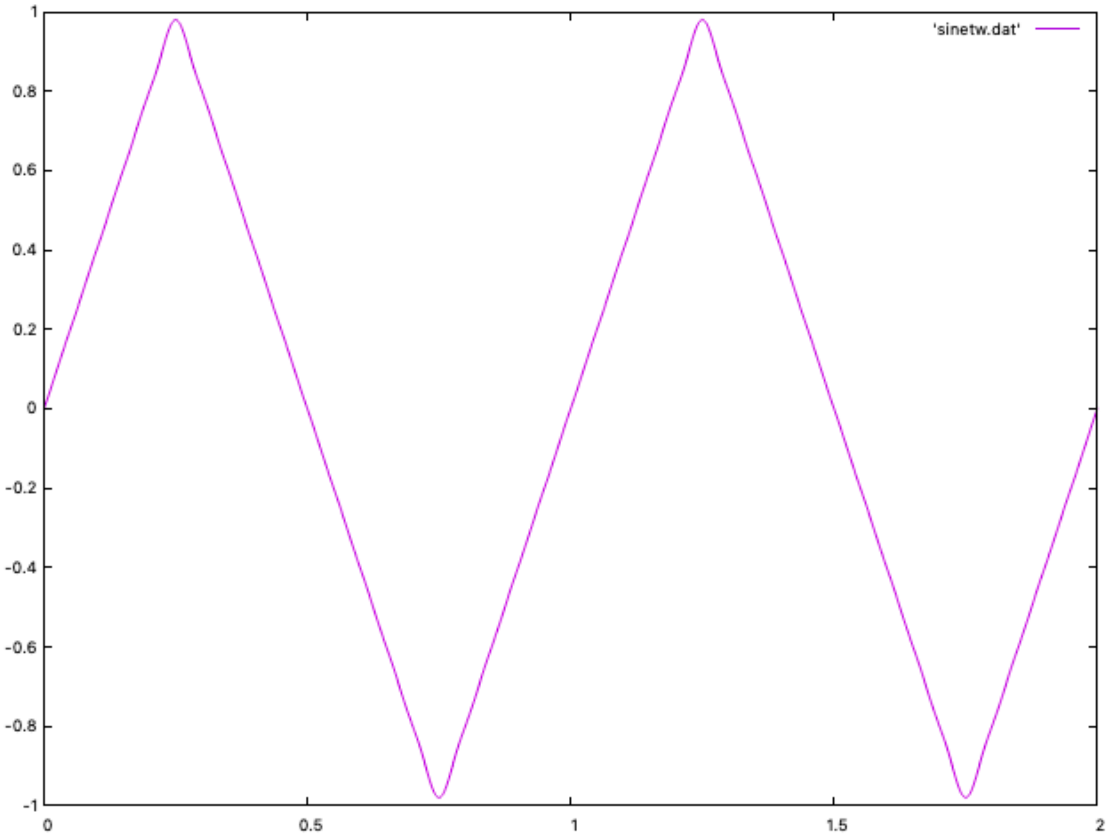

図 16.3　三角波のフーリエ級数による再現 (19 次)：ギプスの現象はない

16.7 フーリエ級数複素表示

フーリエ級数を複素数で表すことを考える。

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \tag{16.21}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \tag{16.22}$$

より，

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[a_n\left(\exp\left[i\frac{2\pi nt}{T}\right] + \exp\left[-i\frac{2\pi nt}{T}\right]\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b_n}{i}\left(\exp\left[i\frac{2\pi nt}{T}\right] - \exp\left[-i\frac{2\pi nt}{T}\right]\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\left(a_n + \frac{b_n}{i}\right)\exp\left[i\frac{2\pi nt}{T}\right] + \left(a_n - \frac{b_n}{i}\right)\exp\left[-i\frac{2\pi nt}{T}\right]\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\left(a_n - ib_n\right) \exp\left[i \frac{2\pi nt}{T} \right] + \left(a_n + ib_n\right) \exp\left[-i \frac{2\pi nt}{T} \right] \right] \tag{16.23}$$

係数を

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{16.24}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{16.25}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{16.26}$$

と置くと，

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[-i \frac{2\pi nt}{T} \right] \tag{16.27}$$

となる。

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left(\cos\frac{2\pi nt}{T} - i \sin\frac{2\pi nt}{T} \right) dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\left[-i \frac{2\pi t}{T} \right] dt \tag{16.28}$$

16.8 直交関数

フーリエ係数を求めるとき

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2\pi mt}{T} \sin\frac{2\pi nt}{T} = 0 \tag{16.29}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi mt}{T} \cos\frac{2\pi nt}{T} = 0 \tag{16.30}$$

ただし

$$m \neq n \tag{16.31}$$

という関係を利用した。関数の値をベクトルの無数の成分と見なすと，ベクトルに倣って積の加算，すなわち積分を作ったものが

$$\int_a^b A(x) B(x) dx = 0 \tag{16.32}$$

のような関係になっているとき，２つの関数 $A(x)$, $B(x)$が区間$[a, b]$で**直交**すると言う。
同様に考えて，

$$\int_a^b A_m^2(x)\,dx = 1 \tag{16.33}$$

のとき $A(x)$関数は区間$[a, b]$で**規格化**あるいは**正規化**されていると言う。

関数の集まり $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,…が

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0 \tag{16.34}$$

を満たすとき，$\{\phi_m(x)\}$を区間$[a, b]$で**直交関数系**という。全ての関数が,

$$\int_a^b \phi_m^2(x)\,dx = 1 \tag{16.35}$$

のとき，**正規直交系**と呼ぶ。

１７．フーリエ積分とフーリエ変換

17.1 フーリエ積分

周期的でない関数 $f(t)$にフーリエ級数を拡張することを考える。フーリエ級数を適用するため周期を無限大であると考える。有限の周期を持つフーリエ級数

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{17.1}$$

に

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\cos\frac{2\pi nu}{T}\,du \tag{17.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin\frac{2\pi nu}{T}\,du \tag{17.3}$$

を代入すると,

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\,du$$

$$\left. + \sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin\frac{2\pi nu}{T}\,du \right] \tag{17.4}$$

となる。次数 n 項の周期 T/n を角振動数 ϖ_n で表すことにする。つまり,

$$\varpi_n = \frac{2n\pi}{T} \tag{17.5}$$

である。このとき,

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2n\pi}{T} - \frac{2(n-1)\pi}{T} = \varpi_n - \varpi_{n-1} = \Delta\varpi$$

であるので,

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\varpi} \tag{17.6}$$

と表される。これを(17.4)に代入すると,

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\,du$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varpi\left[\cos\varpi_n t\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\cos\varpi_n u\,du\right.$$

$$\left.+\sin\varpi_n t\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin\varpi_n u\,du\right] \tag{17.7}$$

である。ここで周期無限大の極限を考える。

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) \tag{17.8}$$

このとき，関数は周期関数ではなくなる。この極限において，(17.7)が計算可能であるためには,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx < \infty \tag{17.9}$$

である，つまり，有限でなければならない。この場合，無限大の T で割るので第 1 項は 0 になる。また， ϖ_n も連続の値を取り， $\Delta\varpi$ は，微分

$$\Delta\varpi = d\varpi \tag{17.10}$$

となる。さらに，$\Delta\varpi$ を掛けて総和を取る計算は ϖ についての積分となる。積分範囲は,

$$n = 1 \to \infty:\ T = \infty \to 0:\ \varpi = 0 \to \infty \tag{17.11}$$

である。結局

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\cos\varpi t\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\varpi u\,du\right)d\varpi\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}\sin\varpi t\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\varpi u\,du\right)d\varpi\right] \tag{17.12}$$

と表すことができる。さらに変形すると,

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\varpi t\cos\varpi u\,du\right]d\varpi\right.$$

$$+\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin\varpi t\sin\varpi u\,du\right]d\varpi \tag{17.13}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\varpi t\cos(-\varpi u)\,du\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin\varpi t\sin(-\varpi u)\,du\right]d\varpi\right\} \tag{17.14}$$

となる。三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{17.15}$$

を用いると，(17.14)は

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\varpi(t-u)\,du\right]d\varpi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\varpi\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\varpi(t-u)\,du \tag{17.16}$$

となる。これを**フーリエ積分公式**と言う。(17.13)は

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[A(\varpi)\cos\varpi t+B(\varpi)\sin\varpi t\right]d\varpi \tag{17.17}$$

と表すこともできる。ここで,

$$A(\varpi)=\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\varpi u\,du \tag{17.18}$$

$$B(\varpi)=\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin\varpi u\,du \tag{17.19}$$

である。(17.18) (17.19)を**フーリエ積分表示**という。

17.2 フーリエ変換

フーリエ積分公式は

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\varpi\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\varpi(t-u)\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\varpi\int_{-\infty}^\infty f(u)\frac{1}{2}\left(e^{i\varpi(t-u)}+e^{-i\varpi(t-u)}\right)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty d\varpi\int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\varpi(t-u)}\,du+\int_0^\infty d\varpi\int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-i\varpi(t-u)}\,du\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}d\varpi\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\varpi(t-u)}\,du+\int_{-\infty}^{0}d\varpi\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\varpi(t-u)}\,du\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\varpi\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\varpi(t-u)}\,du \qquad (17.21)$$

と書き直せる。これはフーリエ積分公式の複素表示である。この式より，

$$F(\varpi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\varpi u}\,du \qquad (17.22)$$

と置けば，f(t)は

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\varpi)e^{i\varpi t}\,d\varpi \qquad (17.23)$$

と書ける。このとき$F(\varpi)$をf(t)の**フーリエ変換**, f(t)を$F(\varpi)$の**フーリエ逆変換**と呼ぶ。

空間座標の x の関数$f(x)$に対しては，角振動数 ω の代わりに，波数 k

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad (17.24)$$

を用いる。フーリエ逆変換を

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\exp\left[ikx\right]dk \qquad (17.25)$$

と書くことにする。ここで，λは空間波長である。

17.3 フーリエ変換の例

・矩形パルス

矩形パルスは

$$f(t)=b \quad (|x|<a)$$
$$f(t)=0 \quad (|x|>a) \qquad (17.26)$$

と書ける。これに対してフーリエ変換することを考える。(17.23)を用いると，

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a}be^{-ikx}\,dx=-\frac{b}{ik}\left[e^{-ikx}\right]_{-a}^{a}=-\frac{b}{ik}\left(e^{-ika}-e^{ika}\right)$$

$$=\frac{2b}{k}\sin ak \qquad (17.27)$$

となる。

・ガウス関数

ガウス関数

$$f\left(x\right)=\exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right] \tag{17.28}$$

をフーリエ変換する。(17.22)より，

$$\begin{aligned}
F\left(k\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right]\exp\left[-ikx\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-ikx-\frac{x^2}{\sigma^2}\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(ikx\sigma^2+x^2\right)\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(x^2+ikx\sigma^2-\frac{k^2\sigma^4}{4}+\frac{k^2\sigma^4}{4}\right)\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left\{\left(x+\frac{ik\sigma^2}{2}\right)^2+\frac{k^2\sigma^4}{4}\right\}\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(x+\frac{ik\sigma^2}{2}\right)^2-\frac{k^2\sigma^2}{4}\right]dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(x+\frac{ik\sigma^2}{2}\right)^2\right]\exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{4}\right]dx\\
&=\exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{4}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(x+\frac{ik\sigma^2}{2}\right)^2\right]dx
\end{aligned} \tag{17.29}$$

となるので，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-ax^2\right]dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{17.30}$$

を用いると，

$$F\left(k\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right]\exp\left[-ikx\right]dx=\sqrt{\pi}\sigma\exp\left[-\frac{\sigma^2k^2}{4}\right] \tag{17.31}$$

となる。すなわち，ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数であり，フーリエ逆変換もガウス関数である。

17.4 ディラックのデルタ関数

ある関数が $x=0$ において無限大の値を持ち，その他では 0 という極端な値を持つ場合を考える。つまり，

$$\delta(x)=\infty \quad (x=0) \tag{17.41}$$

$$\delta(x)=0 \quad (x\neq 0) \tag{17.42}$$

と表わされる関数である。このとき，積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{17.43}$$

となる場合，この関数を**ディラックのデルタ関数**と呼ぶ。今 $x=a$ 付近で連続な関数を考え，デルタ関数と掛けたものを積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx=f(a) \tag{17.44}$$

となる。

このような関数は，幅がε，高さが $1/\varepsilon$とした矩形パルスを考え，フーリエ変換すると，(17.27)より，

$$F(k)=\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\frac{1}{\varepsilon}e^{-ikx}\,dx=-\frac{1}{ik\varepsilon}\left[e^{-ikx}\right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}=\frac{1}{ik\varepsilon}\left(e^{ik\varepsilon/2}-e^{-ik\varepsilon/2}\right) \tag{17.45}$$

となる。ここで$\varepsilon\to 0$ とする極限を取ると，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{ik\varepsilon}\left(e^{ik\varepsilon/2}-e^{-ik\varepsilon/2}\right)=\frac{1}{ik}\left(\frac{de^{ik\varepsilon}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\frac{ik}{ik}e^{ik0}=1 \tag{17.46}$$

となり，デルタ関数のフーリエ変換が 1 であることが示される。このことは，1 のフーリエ逆変換がデルタ関数であること，すなわち，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\,dx=\delta(x) \tag{17.47}$$

を示している。

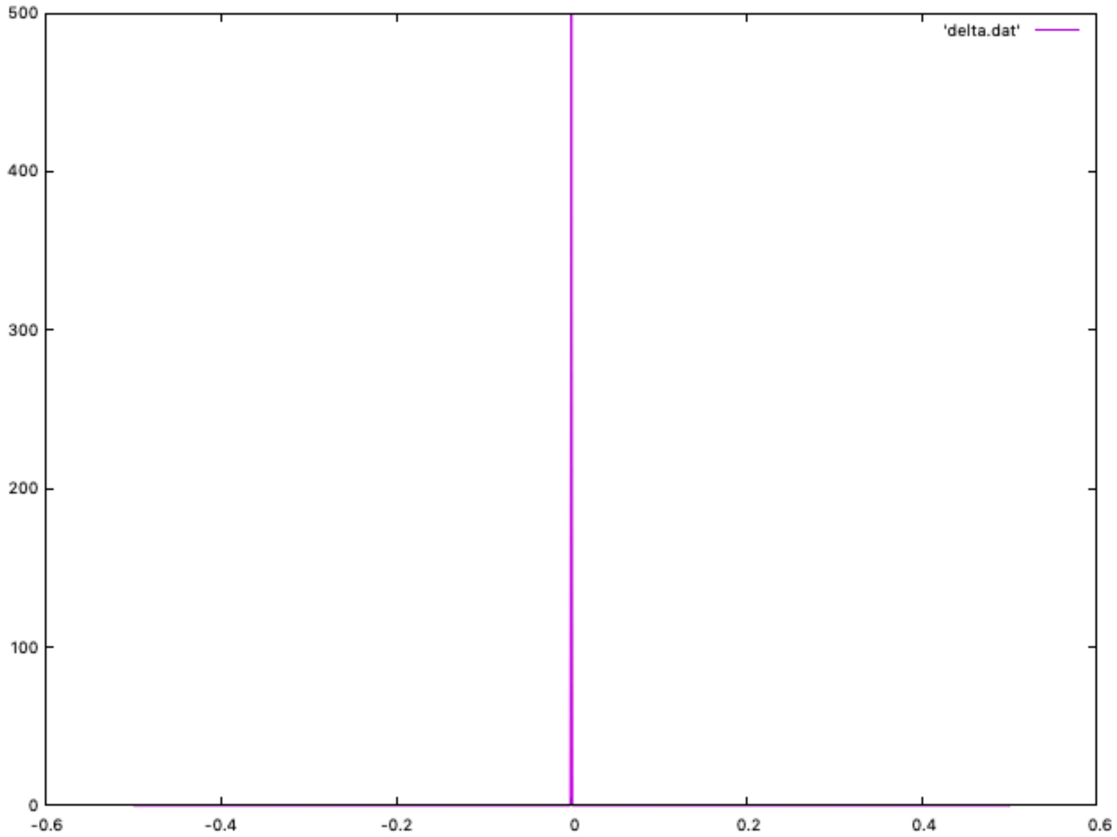

図 17.1　サンプル周波数 1000Hz の 500 次余弦級数によるデルタ関数