VI. 常微分方程式

14. １階常微分方程式

導関数をもつ方程式を微分方程式とよぶ。常微分方程式は常微分係数のみをもつ微分方程式である。ここでは，１階微分係数のみをもつ常微分方程式を考える。

14.1 変数分離形の 1 階常微分方程式

1 階微分係数のみをもつ常微分方程式は 1 階常微分方程式とよばれる。1 階常微分方程式は,

$$F\left(x, y, y'\right)=0 \tag{14.1}$$

と表すことができる。$y(x)$が求める解である。

1 階微分方程式が

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x\right)g\left(y\right) \tag{14.2}$$

のように変形できるときには,

$$\frac{dy}{g\left(y\right)}=f\left(x\right)dx \tag{14.3}$$

となって，左辺が y だけの，右辺が x だけの関数となる。このように書くことができる常微分方程式を変数分離形という。この式は，積分ができて,

$$\int\frac{dy}{g\left(y\right)}=\int f\left(x\right)dx+C \tag{14.4}$$

のように解くことができる。

14.2 線型 1 階微分方程式

次に 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+p\left(x\right)y=q\left(x\right) \tag{14.5}$$

を考える。この式において，p, q は x のみの関数である。つまり，式が y や y の微分係数の 1 乗である項の結合，すなわち 1 次結合あるいは線型結合で表されている。このような微分方程式を線型微分方程式という。

$$q(x)=0 \tag{14.6}$$

のときはyを含まない項が0であり，同次方程式となる。このとき，

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \tag{14.7}$$

より，

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+C_1 \tag{14.8}$$

$$\log y=-\int p(x)dx+C_1 \tag{14.9}$$

$$y=\exp\left[C_1\right]\exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{14.10}$$

$$y=C\exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{14.11}$$

と解が求められる。

$$q(x)=0 \tag{14.12}$$

のときは非同次方程式となる。このときは,

$$y=C(x)\exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{14.15}$$

とおいて $C(x)$を求める。このような方法を定数変化法という。を微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dC(x)}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right]+C(x)\frac{d}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right]\\&=\frac{dC(x)}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right]+C(x)\exp\left[-\int p(x)dx\right](-p(x))\\&=\frac{dC(x)}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right]-p(x)y\end{aligned} \tag{14.16}$$

となる。

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=\frac{dC(x)}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{14.17}$$

と変形できるので,

$$\frac{dC(x)}{dx}\exp\left[-\int p(x)dx\right]=q(x) \tag{14.18}$$

であり，

$$\frac{dC(x)}{dx}=q(x)\exp\left[\int p(x)dx\right] \tag{14.19}$$

となってこの式を積分すれば，$C(x)$が求められる。すなわち，

$$C(x)=\int q(x)\exp\left[\int p(x)dx\right]dx+D \tag{14.20}$$

が得られる。これを(14.15)に代入すると，

$$y=\exp\left[-\int p(x)dx\right]\left(\int q(x)\exp\left[\int p(x)dx\right]dx+D\right) \tag{14.21}$$

と求められる。

14.2 完全形

方程式が，

$$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0 \tag{14.22}$$

のように微分で表される式も微分方程式である。というのは，

$$p(x,y)+q(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{14.23}$$

であるからである。このとき，

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x} \tag{14.24}$$

となっている場合，(14.22)はある関数 $u(x, y)$の全微分が 0 という式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=0 \tag{14.25}$$

になっている。なぜなら，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p(x,y) \tag{14.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=q(x,y) \tag{14.27}$$

より，

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{14.28}$$

だからである。この場合，(14.22)は完全形と呼ばれる。(14.25)は等高線を表す式

$$u(x,y) = C \tag{14.29}$$

を解に持つ。一方，$p(x, y)$を x で積分した関数

$$F(x,y) = \int p(x,y)dx \tag{14.30}$$

を用いると，

$$u(x,y) = F(x,y) + D(y) \tag{14.31}$$

という形に書けるはずである。ここで，$D(y)$は任意の y だけの関数である。(14.31)より，

$$p(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{14.32}$$

が成り立っていることがわかる。(14.24)から

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{14.33}$$

となるので，この式から

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(q - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \tag{14.34}$$

が得られる。括弧の中は x で偏微分したときに 0，すなわち y のみの関数

$$G(y) = q - \frac{\partial F}{\partial y} \tag{14.35}$$

となっているので，これを y で積分して $D(y)$とする。すなわち，

$$D(y) = \int G(y)dy \tag{14.36}$$

である。(14.31)に代入すると，

$$u(x,y) = \int p(x,y)dx + \int\left(q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)dx\right)dy = C \tag{14.37}$$

となる。この式は，(14.22)を満たしている。なぜなら，(14.33)を y で微分すると，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x,y) \tag{14.38}$$

となり，(14.27)と一致するからである。

いま，次のような例を考える。

$$p(x,y) = 8x^3 + 2xy \tag{14.39}$$

$$q(x,y) = x^2 - 2y + 1$$

このとき，

$$p(x,y)dx + q(x,y)d = 0 \tag{14.40}$$

は完全形の微分方程式である。なぜなら，

$$f(x,y) = 2x^4 + x^2y - y^2 + y \tag{14.41}$$

を x, y で (13.31)を偏微分したものが p, q であり，f の全微分は

$$df = p(x,y)dx + q(x,y)dy \tag{14.42}$$

であるからだ。このとき，

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{14.43}$$

となり，(14.28)も成立している。(14.33)より，

$$I = \int \left(8x^3 + 2xy\right)dx + \int \left[\left(x^2 - 2y + 1\right) - \frac{\partial}{\partial y} \int \left(8x^3 + 2xy\right) dx \right] dy \tag{14.44}$$

$$= 2x^4 + x^2y + x^2y - y^2 + y + C_1 - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4 + x^2y\right)dy$$

$$= 2x^4 + x^2y + x^2y - y^2 + y + C_1 - \int x^2 dy$$

$$= 2x^4 + x^2y + x^2y - y^2 + y - x^2y + C_2$$

$$= 2x^4 + x^2y - y^2 + y + C_2 \tag{14.45}$$

となるので，解は

$$f(x,y) = C \tag{14.46}$$

で良いことも分かる。

１５．２階常微分方程式

ここでは，２階までの微分係数をもつ常微分方程式を考える。

15.1 ２階常微分方程式

２階までの微分係数をもつ常微分方程式は２階常微分方程式とよばれる。一般的には，

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \qquad (15.1)$$

と表すことができる。

２階微分方程式は，場合によって 1 階微分方程式に変形することができる。1 つの例は，(15.1)で，y の項が含まれていない場合

$$F\left(x, y', y''\right) = 0 \qquad (15.2)$$

である。このときは $p = y'$ として，

$$F\left(x, p, p'\right) = 0 \qquad (15.3)$$

と表すことができるからである。

今，自由落下を考える。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \qquad (15.4)$$

ここで，

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (15.5)$$

は速度である。(15.5)を(15.4)に代入すると，

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad (15.6)$$

となる。変数分離をして得られた

$$dv = -g\,dt \qquad (15.7)$$

を積分する。すなわち，

$$\int dv = -\int g\,dt \qquad (15.8)$$

$$v = -gt + C_1 \qquad (15.9)$$

が得られる。ここで，C_1 は任意定数である。もう一度(15.6)を用いると，

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1 \tag{15.10}$$

$$dx = \left(-gt + C_1\right)dt \tag{15.11}$$

より，解

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{15.12}$$

が得られる。ここで，C_2 も任意定数である。このように，２階常微分方程式の任意定数は２つであり，これらの任意定数を決定するには初期条件や終端条件など２つの境界条件が必要である。ここで，境界条件が２つとも初期条件のとき，(15.9)と(15.12) に $t=0$ を代入すると，C_1 と C_2 はそれぞれ，初速度 $v_0 = v\ (t = 0)$と初期位置で $x_0 = x\ (t = 0)$あることがわかる。したがって，x は

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \tag{15.13}$$

と求められる。

15.2 位置エネルギー

ここで，運動方程式に現れる力が場所 x のみの関数であるとする。

$$m\frac{dv}{dt} = F\left(x\right) \tag{15.21}$$

加速度を速度の微分で置き換えると，9.2 節と同様の議論を行うと，

$$mv\frac{dv}{dx} = F\left(x\right) \tag{15.22}$$

$$mvdv = F\left(x\right)dx \tag{15.23}$$

と変形できる。(15.23)の両辺をそれぞれ積分し，

$$\int_{v(a)}^{v(b)} mv\,dv = \int_a^b F\left(x\right)dx \tag{15.24}$$

となる。ここで，左辺に積分を実行し，右辺の積分を次の通り２つに分ける。

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_\infty^b F\left(x\right)dx - \int_a^\infty F\left(x\right)dx \tag{15.25}$$

ここで，

$$V\left(x\right)=-\int_{\infty}^{x}F\left(x'\right)dx' \qquad (15.26)$$

とおく。$V(x)$は無限遠から質点を移動させたとき，質点が受ける仕事である。負号は質点が仕事をされることを意味する。さらに，位置 x のみの関数であるので，位置エネルギーあるいはポテンシャルエネルギーとよばれる。(15.25)を用いると，(15.26)は,

$$\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2=-V\left(b\right)+V\left(a\right) \qquad (15.27)$$

である。左辺と右辺を地点 a, b における運動エネルギーと位置エネルギーでまとめると，

$$\frac{1}{2}mv_b^2+V\left(b\right)=\frac{1}{2}mv_a^2+V\left(a\right)=const. \qquad (15.28)$$

となる。力が場所のみの関数であるとき，運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存することを示す。

15.3 単振動と線型２階常微分方程式

バネと重りが繋がった状態を考える。バネ定数を k，重りの質量を m とする。質量を釣り合いの状態から重りを引っ張って手を離すと，重りは振動運動を始める。釣り合いの位置を原点とし, 変位を x とすると, 重りの運動方程式は, ニュートンの運動法則より，

(15.31)

と表される。ここで，F_s はバネから受ける力である。バネ定数を k とすると，F_s の大さは x に比例し，方向は反対に働く。すなわち，

$$F_S=-kx \qquad (15.32)$$

と表される。したがって，運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad (15.33)$$

あるいは,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (15.34)$$

と表される。この式は時間の関数 $x(t)$を求める２階の微分方程式となっている。ここで,

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad (15.35)$$

とおくと，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \tag{15.36}$$

と表される。この式は，より一般的な常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=r(t) \tag{15.37}$$

において，

$$p(t)=0 \tag{15.38}$$

$$q(t)=\omega^2 \tag{15.39}$$

$$r(t)=0 \tag{15.40}$$

とした式となっている。(14.45)は(14.5)と同様に線型常微分方程式である。２階の場合は，線型２階微分方程式とよばれる。この式のように p(t)と $q(t)$が定数のとき，定数係数線型２階微分方程式という。

(14.44)のように右辺が 0 の場合，その解は次のように求めることができる。x を複素数 z で置き換え，解を

$$z=e^{\lambda t} \tag{15.41}$$

と推測する。ここで，z や λ は複素数であり，かつ λ は定数である。(14.49)を(14.44)に代入すると，

$$\lambda^2e^{\lambda t}+\omega_0^2e^{\lambda t}=0 \tag{15.42}$$

より，

$$\lambda^2+\omega_0^2=0 \tag{15.43}$$

が得られる。この式は特性方程式とよばれる。この式から，

$$\lambda=\pm i\omega_0 \tag{15.44}$$

となる。このとき解は，

$$z=e^{i\omega_0 t} \tag{15.45}$$

$$z=e^{-i\omega_0 t} \tag{15.46}$$

の２つであるということになるが，これらの線型結合も線型微分方程式の解である。つまり解は，

$$z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{15.47}$$

である。ここで，C_1, C_2 は任意定数であり，複素数である。実際の変位を表す x は実数であるので，z の実数部分をとり，

$$x = \mathrm{Re}\left[z\right] \tag{15.48}$$

より，任意定数 A, B を用いて，

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{15.49}$$

あるいは，任意定数 A, ϕ を用いて，

$$x = A\cos\left[\omega_0 t + \phi\right] \tag{15.50}$$

と表すことができる。ここで，A,は振幅，ϕ は初期位相である。２つの任意定数が含まれるのは，微分方程式が２階だからである。これらの定数は境界条件によって決めることができる。

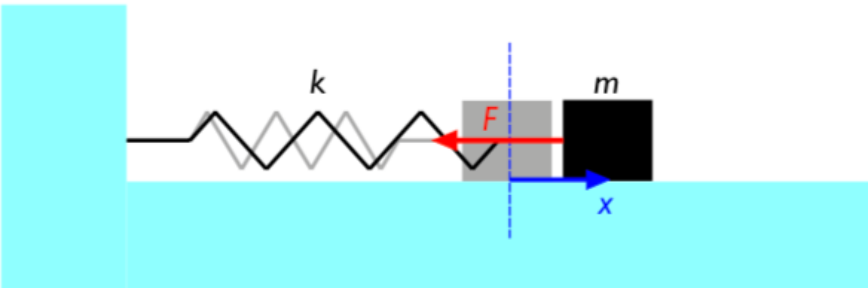

図 14.1　単振動：重りの変位とバネの復元力

14.4 過渡的な状態：減衰と減衰振動

今度はバネと重りだけでなく，図 14.2 のようにバネとダッシュポットにつながっている場合を考える。３つがまっすぐに並んでいるように描かれているが，重りにかかる力は，バネからの力とダッシュポットからの力の和である，すなわち並列繋ぎであることに注意すべきである。このとき，バネとダッシュポット以外の外力が働かないとすると，重りの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_S+F_D \tag{15.51}$$

と表される。ダッシュポットは封入された粘性流体から抵抗を受けるピストンのような物である。そのため，粘性流体から速度に比例した抵抗

$$F_D=-\beta\frac{dx}{dt} \tag{15.52}$$

を受ける。したがって，運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \tag{15.53}$$

となる。ここで,

$$2\gamma=\frac{\beta}{m} \tag{15.54}$$

である。(15.53)のような右辺が 0 の方程式を同次方程式という。このときは，ダッシュポットの作用により，運動が収まっていく過渡的な状態を表す。

　同次線型常微分方程式の解は(14.46)と同様な方法で求めることができる。(14.46)より，特性方程式

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0 \tag{15.55}$$

が得られる。λを求めると,

$$\lambda=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \tag{15.56}$$

となる。λは平方根の中が正のときは，実数となり，負のときは複素数となる。したがって，γと ω_0との関係によって運動の様相が変化する。

(1) $\gamma>\omega_0$のとき：過減衰

λ は実数であり，振動は起こらない。減衰定数が大きく，速度について急激な減衰が起こる。このとき，解は,

$$x=e^{-\gamma t}\left(C_1\exp\left[t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right]+C_2\exp\left[-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right]\right) \tag{15.57}$$

である。ここで，C_1, C_2は任意定数であり，実数である。初期条件で，重りの変位と速度が

$$x(0)=x_0 \tag{15.58}$$

$$v(0)=0 \tag{15.59}$$

のように与えられるとき，

$$C_1=\frac{x_0\omega_0\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)}{2\omega_0\sqrt{h^2-1}} \tag{15.60}$$

$$C_2=\frac{-x_0\omega_0\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)}{2\omega_0\sqrt{h^2-1}} \tag{15.61}$$

ここで，

$$h=\frac{\gamma}{\omega_0} \tag{15.62}$$

で，過減衰のときは $h>1$ である。ダッシュポットの作用により，重りの運動が遅くなるので，振幅は臨界減衰のときよりもゆっくり減少する。

(2) $\gamma=\omega_0$ のとき：臨界減衰

λ は重解である。臨界減衰は過減衰と減衰振動の境界であり，$h=1$ である。このとき，

$$x=C_1e^{-\gamma t} \tag{15.63}$$

という解のほか，

$$x=C_2te^{-\gamma t} \tag{15.64}$$

という解も持つ。これは次の議論からわかる。ここで，もう 1 つの解は γ に十分小さい ε を加えたものであると考える。このとき，(14.68)のテイラー展開を 1 次までとると，

$$e^{-(\gamma+\varepsilon)t}=e^{-\gamma t}+\frac{d\left(e^{-\gamma t}\right)}{d\gamma}\varepsilon=e^{-\gamma t}+te^{-\gamma t}\varepsilon \tag{15.65}$$

となる。ε を任意定数のように考えると，(14.69)を解に持っていなければならない。したがって，解は

$$x=e^{-\gamma t}\left(C_1+C_2t\right) \tag{15.66}$$

となる。初期条件が(15.58) (15.59)で与えられるとき，任意定数は

$$C_1 = x_0 \tag{15.67}$$

$$C_2 = \omega_0 x_0 \tag{15.68}$$

となる。臨界減衰のときには振幅が最も早く 0 になる。

(3) $\gamma < \omega_0$ のとき：減衰振動

λ は複素数であり，振動しながら振幅が徐々に小さくなってゆく解となる。減衰定数 γ が小さいためである。また， $h < 1$ である。このような運動は減衰振動と呼ばれる。

$$x = e^{-\gamma t}\left(C_1 \exp\left[it\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right] + C_2 \exp\left[-it\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right]\right) \tag{15.69}$$

より，

$$x = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left[t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right] + B\sin\left[t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right]\right) \tag{15.70}$$

である。ここで，A, B も初期条件から決まる任意定数である。初期条件が(15.58)(15.59)で与えられるとき，これらは

$$A = x_0 \tag{15.71}$$

$$B = \frac{hx_0}{\sqrt{1-h^2}} \tag{15.72}$$

と計算される。

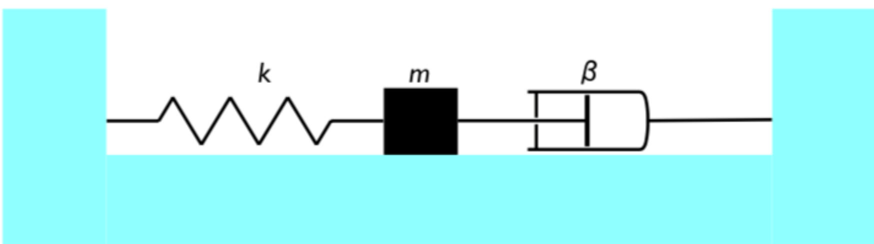

図 14.2　バネとダッシュポットが繋がれた重り

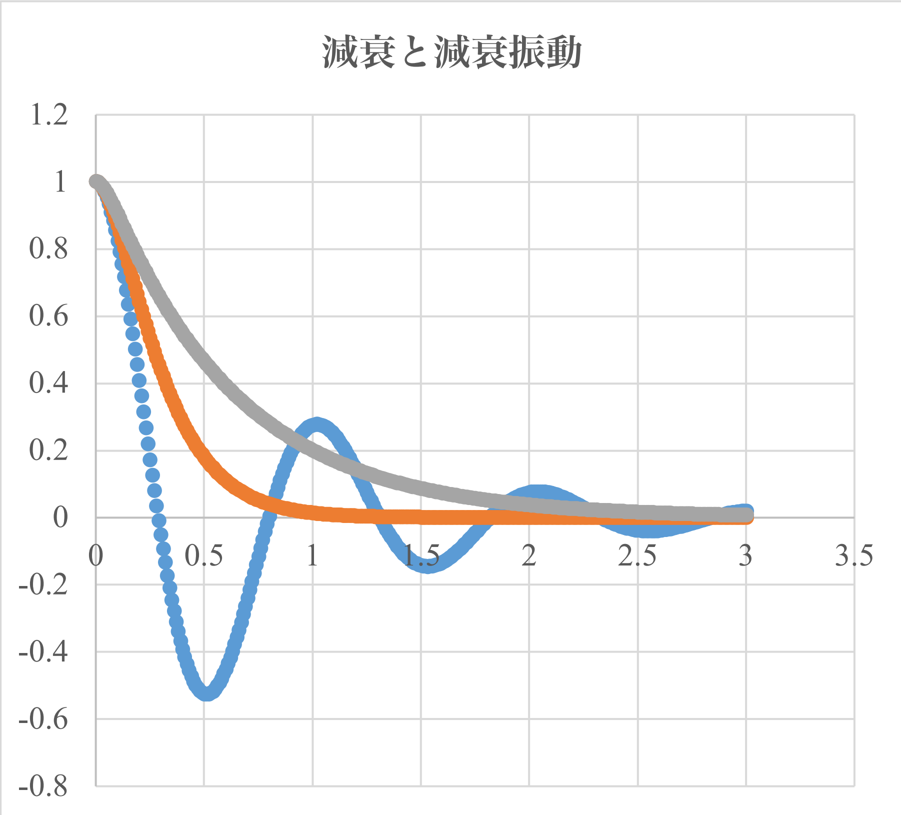

図 14.3　過減衰(灰色，$h = 2.0$)・臨界減衰(橙，$h = 1.0$)・減衰振動(青，$h = 0.2$)
$x_0 = 1.0$, $v_0 = 0$, $\omega_0 = 2\pi\,(T_0 = 1.0)$のときの解

14.4 外力が存在する場合：強制振動

今，図のように系全体を支えている地面が振動する場合を考える。このとき，静止した座標系からみた重りの運動方程式を考える。重りの静止座標からみた変位を x，地動の変位を X で表すことにする。右辺のダンピング，およびバネの反発力の項はそれぞれ，地面と重りの速度差，および変位差となる。このため，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{d}{dt}\left(x - X\right) - k\left(x - X\right) \tag{15.81}$$

と表すことができる。ここで，重りと地面の変位差，すなわち，地面からみた重りの相対変位を

$$x' = x - X \tag{15.82}$$

と表すことにする。このとき，重りの変位は，

$$x = x' + X \tag{15.83}$$

である。(14.82) (14.83)を用いると，(14.81)は

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{d^2X}{dt^2}\right)=-\beta\frac{dx'}{dt}-kx' \tag{15.84}$$

となる。左辺の第２項，つまり，地面の加速度の項を右辺に移行すると，

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=-\beta\frac{dx'}{dt}-kx'-m\frac{d^2X}{dt^2} \tag{15.85}$$

となる。この式は，地面からみた重りの運動方程式である。地面の加速度は静止した座標では存在しない見かけの力である。地面が上向きの加速度を持つと，重りはその慣性で同じ場所に留まろうとするので, 変位差が減少していく方に見かけの加速度を受ける。ここで，地面の揺れを，

$$X=X_0\cos\omega t \tag{15.86}$$

と仮定する。実際の揺れは，様々な周期の波の重ね合わせ，フーリエ級数 (変換) として表すことができる。(14.86)を(14.85)に代入すると，

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=-\beta\frac{dx'}{dt}-kx'+m\omega^2X_0\cos\omega t \tag{15.87}$$

となる。右辺の第１項と第２項を左辺に移項して，m で割ると，

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+2\gamma\frac{dx'}{dt}+\omega_0^2x'=m\omega^2X_0\cos\omega t \tag{15.88}$$

と表される。この式は非同次線型常微分方程式である。ここで，(14.44)と同様 x を複素数 z に置き換えると，

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_0^2z=\omega^2X_0\exp\left[i\omega t\right] \tag{15.89}$$

となる。(14.88)は，この式の実部をとったものであるので，解も z の実部をとったものである。

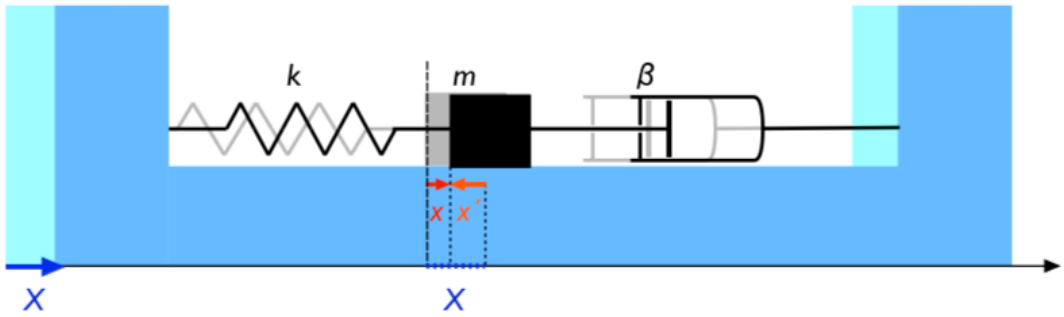

図 14.4　機械式地震計(水平動)の原理：地動 X，重りの変位 x，相対変位 x'

さて，(14.89)の解であるが，一般的には未定定数法を用いて求められる。すなわち，の任意定数を t の関数として，

$$z = C_1(t)\exp[i\omega t] + C_2(t)\exp[-i\omega t] \tag{15.90}$$

とするのである。しかしながら，この方法は少し計算が大変なので以下のように考える。(14.88)の一般は過渡的な応答の一般解 (14.57) (14.66) (14.69)のいずれかと，外力項があることにより起こる定常的な運動による特解を足し合わせたもので表される。(14.89)から，特解の形を推測し，

$$z = A\exp[i\omega t] \tag{15.91}$$

とおく。これを(14.89)に代入すると，

$$\left(-\omega^2 A\mathrm{e} + 2i\gamma\omega A + \omega_0^2 A\right)\exp[i\omega t] = \omega^2 X_0 \exp[i\omega t] \tag{15.92}$$

となるので，$\exp[i\omega t]$で割って，左辺を A でまとめると，

$$\left(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right)A = \omega^2 X_0 \tag{15.93}$$

が得られる。A について解くと，

$$A = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} X_0 \tag{15.94}$$

が求められる。両辺を入力の振幅 X_0 で割ったものを A' とおく。A' は地震計の相対変位と地動変位との振幅比の周波数特性を表す。さらに，有理化すると，

$$A' = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \tag{15.95}$$

$$= \frac{\omega^2\left(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega\right)}$$

$$= \frac{\omega^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - \frac{\omega^2\left(2\gamma\omega\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} i \tag{15.96}$$

となる。よって，解は

$$z = A'X_0 \exp\left[i\omega t\right] \tag{15.97}$$

と表される。この式の実数部をとったものが(14.88)の解である。すなわち，

$$x' = BX_0 \cos\left[\omega t + \phi\right] \tag{15.98}$$

である。ここで，(15.86)の実数部を a，虚数部を b として，

$$B = \left|A'\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{15.99}$$

$\omega < \omega_0$ $(a > 0)$のとき，

$$\tan\phi = \frac{b}{a} \tag{15.100}$$

である。ここで，B は倍率，ϕ は位相のずれを表す。A'の２乗

$$\left|A'\right|^2 = \left[\frac{\omega^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{\omega^2\left(2\gamma\omega\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right]^2$$

$$= \frac{\left[\omega^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]^2 + \left[\omega^2\left(2\gamma\omega\right)\right]^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^2}$$

$$= \frac{\omega^4\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^2}$$

$$=\frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad (15.101)$$

より， B は

$$B=\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad (15.102)$$

となる。また，(15.90)は

$$\tan\phi=-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (15.103)$$

と求められる。ここで,

$$u=\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{2\pi\nu_0}{2\pi\nu}=\frac{T}{T_0} \qquad (15.104)$$

$$h=\frac{\gamma}{\omega_0} \qquad (15.105)$$

とおく。ここで，ν_0 と T_0 は地震計の振子の固有振動数と固有周期，ν と T は地震波の振動数と周期である。したがって，u は長周期の地震波ほど大きくなる。また，h はダンピングファクターの固有振動数に対する相対的な強さであり，大きいほど減衰が強い。このとき，(14.102)と(14.103)は

$$B=\frac{1}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+4h^2u^2}} \qquad (15.106)$$

$$\tan\phi=\frac{2hu}{1-u^2} \qquad (15.107)$$

となる。h が 1 のとき，地震計の過渡応答が臨界減衰であることを意味する。図 14.4 は地震計の振幅特性 (15.96) のグラフである。

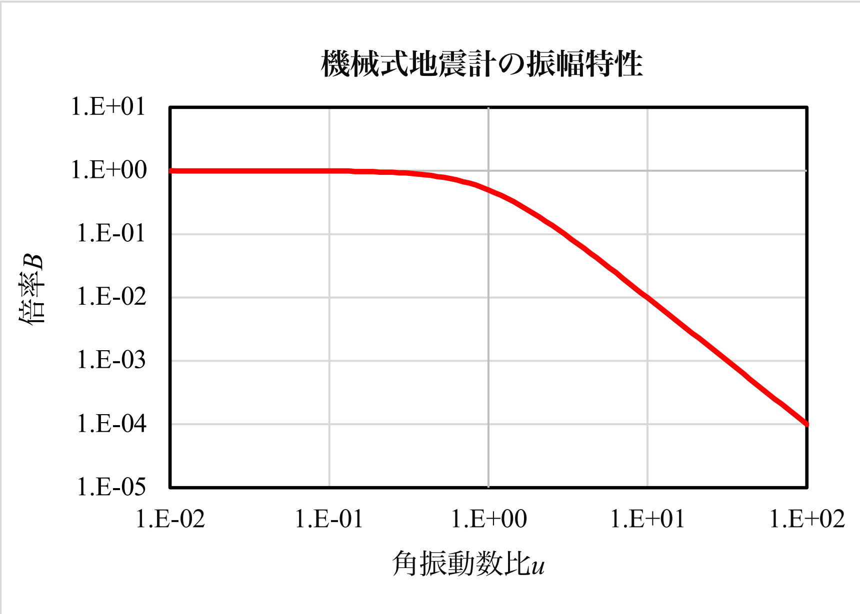

図 14.5　$h = 1$ のときの機械式地震計の振幅特性

この力学的な系は, 抵抗･コンデンサ･コイル, および交流電源を直列につないだ RLC 回路と等価である。抵抗値を R, 電気容量を C, インダクタンスを L とすると, 電圧降下の合計が電源電圧に等しいことから, 電圧の式は

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = V(t) \tag{15.108}$$

となる。この式を時間で微分すると, 非同次２階線型常微分方程式

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV(t)}{dt} \tag{15.109}$$

が得られる。