

1 **V. 積分と積分の定理**

2

3 **12. 多重積分**

4 多変数関数を x - y 平面上や3次元空間において積分することを考える。

5

6 **12.1 微分と積分**

7 微少量 df を無限個足し合わせて、有限の量を作るのが積分である。 df を足すと関数 f
8 の差が得られる。すなわち、

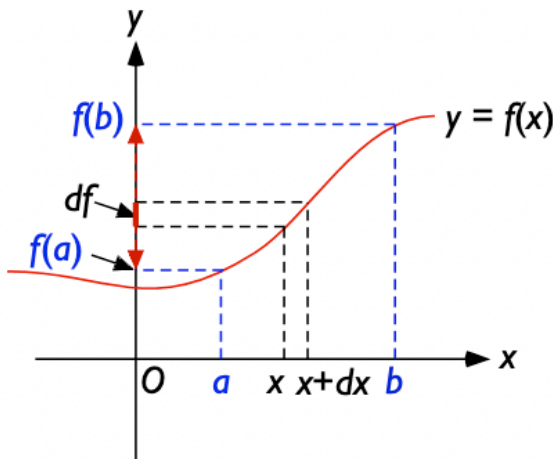
9
$$I = f(b) - f(a) = \int_a^b df = \int_a^b f'(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f'(x_i) \delta x_i \tag{12.1}$$

10 である。このように始点と終点が指定されている積分を定積分とよぶ。足し合わせると
11 きの始点と終点を指定しない積分は不定積分とよばれる。

12
$$\int f'(x) dx = f(x) + C \tag{12.2}$$

13 ここで、 C は積分定数である。

14



15

16 図 12.1 定積分

17

18 **12.2 二重積分**

19 2変数関数 $f(x, y)$ を x - y 平面上の領域 R に対して行う積分を二重積分という。すなわ
20 ち、

21
$$I_A = \iint_R f(x,y) dA = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \delta A_i$$
 (12.3)

22 である。2重の記号は煩雑なので、省略して書くことも多い。

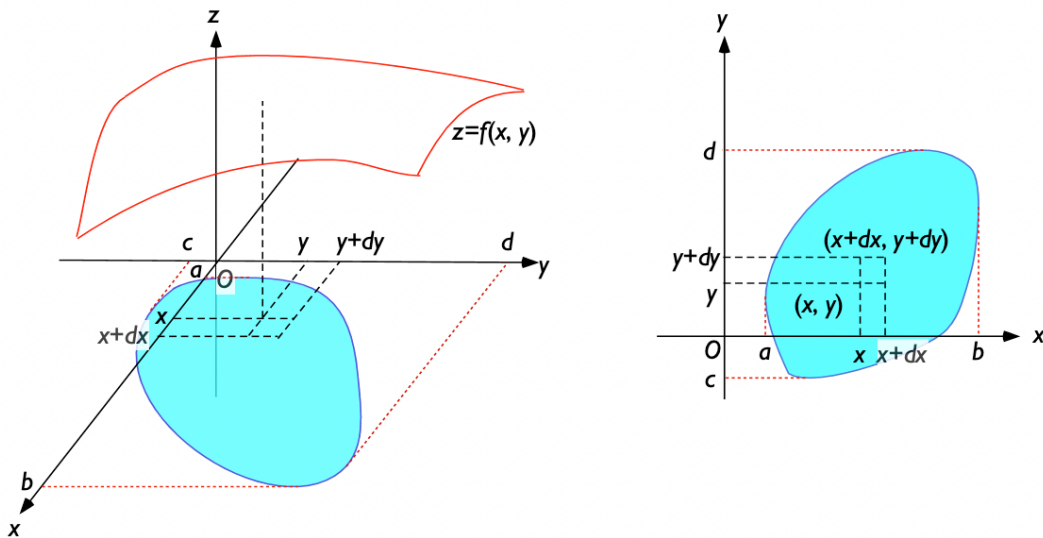
23
$$I_A = \iint_R f(x,y) dx dy = \int_R f(x,y) dx dy$$
 (12.4)

24 実際の計算は x 方向と y 方向 2 回に分けて行う。すなわち、

25
$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{m(y)}^{n(y)} f(x,y) dx \right] dy$$
 (12.5)

26 のとおりである。

27



28

29 図 12.2 二重積分と積分範囲

30

31

32 12.2 二重積分の例

33 ここでは次のような例を考える。

34
$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dx dy$$
 (12.6)

35 ここで積分を y, x の順番に行う。すなわち、

36
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx$$
 (12.7)

37 とする。積分を実行すると、定積分の値が以下のように求められる。

38

$$I = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

39

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2) dx$$

40

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \right)$$

41

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

(12.8)

42

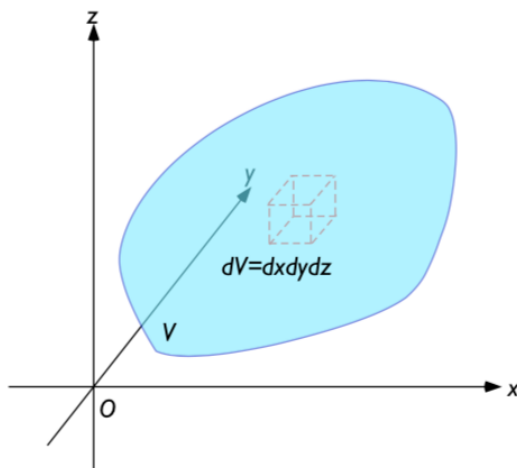
43 12.3 体積分

44 3変数関数 $f(x, y, z)$ を x - y - z 空間の領域 V に対して行う積分を三重積分あるいは体積
 45 分という。すなわち、

46

$$I_V = \iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (12.11)$$

47 のことである。 f はスカラー関数のほか、ベクトル、テンソル関数であっても良い。
 48



49

50 図 12.3 体積分と微小体積

51

52

53 12.2 体積分の例

54 ・質量

55
$$M = \int_V \rho(x,y,z) dx dy dz \quad (12.12)$$

56 すなわち、密度を体積分した量である。

57 ・重心の座標

58 重力による回転が発生しない、つまり、重力のモーメントの和が0となる位置 \mathbf{r}_G を
59 重心とよぶ。すなわち、密度と重心からの相対位置ベクトルを掛けて積分したとき0と
60 なる位置が重心である。すなわち、

61
$$\int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \times \rho(x,y,z) \mathbf{g}] dx dy dz = 0 \quad (12.13)$$

62 \mathbf{g} が一定であることを考えると、上式は

63
$$\left[\int_V \rho(x,y,z) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) dx dy dz \right] \times \mathbf{g} = 0 \quad (12.14)$$

64 であることから、

65
$$\int_V \rho(x,y,z) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) dx dy dz = 0 \quad (12.15)$$

66 となる。つまり、

67
$$\int_V \rho(x,y,z) \mathbf{r} dx dy dz - \mathbf{r}_G \int_V \rho(x,y,z) dx dy dz$$

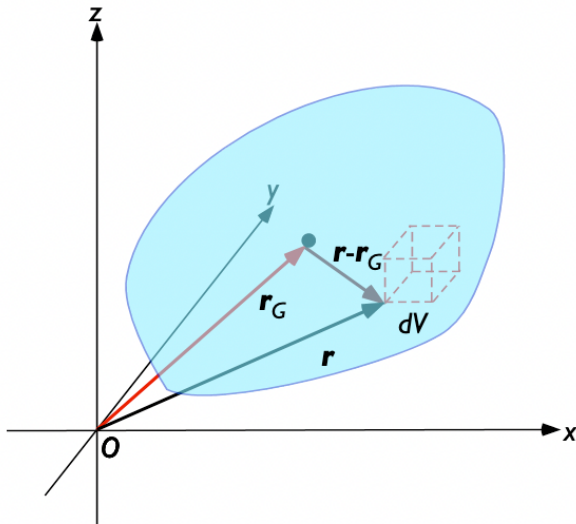
68
$$= \int_V \rho(x,y,z) \mathbf{r} dx dy dz - \mathbf{r}_G M = 0 \quad (12.16)$$

69 である。よって、重心の位置 \mathbf{r}_G は、

70
$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_V \rho(x,y,z) \mathbf{r} dx dy dz \quad (12.17)$$

71 と表される。

72



73
74 図 12.4 重心
75

76 12.3 剛体の運動と慣性モーメント

77 いま、剛体の運動を考える。剛体のように大きさを持つ物体は剛体内の微小な体積を
78 考え、それぞれの体積がニュートンの運動方程式に従うと考えれば計算することができ
79 る。しかし、それぞれ点の位置関係が変わらないので、その拘束条件が必要である。そ
80 の拘束条件とは、剛体全体の重心から見た相対位置ベクトルが変化せず、回転の角速度
81 ベクトルが一定であるということである。このことから、剛体の運動は、重心の並進運
82 動ベクトルの 3 成分と回転の角速度ベクトル 3 成分の 6 自由度で表されることがわか
83 る。いま、角運動量ベクトル

84
$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{12.20}$$

85 を考える。剛体の中の点を k で表すと、角運動量の時間変化は、

86
$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k \right) = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV \tag{12.21}$$

87 である。x 成分のみ書くと、

88
$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) (x_2 v_3 - x_3 v_2) dV \tag{12.22}$$

89 となる。それぞれの点の速度は角速度と位置ベクトルを用いて、

90
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) \mathbf{e}_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) \mathbf{e}_2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \mathbf{e}_3 \tag{12.23}$$

91 と表される。これを(12.22)に代入すると、

$$\begin{aligned}
92 \quad \frac{dl_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) [x_2(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - x_3(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)] dV \\
93 \quad &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) [(x_2^2 + x_3^2)\omega_1 - x_1 x_2 \omega_2 - x_3 x_1 \omega_3] dV \quad (12.24)
\end{aligned}$$

94 (12.21) の i 成分は,

$$95 \quad \frac{dl_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \sum_{j=1}^3 \left\{ \rho(x_1, x_2, x_3) [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ij} - x_i x_j] \omega_j \right\} dV \quad (12.25)$$

96 であり、剛体では、 ω はどの点においても一定であることを考えると、積分の外に出す
97 ことができ、

$$98 \quad \frac{dl_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ij} - x_i x_j] dV \omega_j \right\} \quad (12.26)$$

99 と表される。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。ここで、2つの添え字を持つ
100 量、すなわちテンソル量

$$101 \quad I_{ij} = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ij} - x_i x_j] dV \quad (12.27)$$

102 は慣性モーメントとよばれる。この量を用いると、角運動量の保存則は、

$$103 \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 (I_{ij} \omega_j) = N_i \quad (12.28)$$

104 と表される。(12.27)と(12.28)は、ベクトル表示では

$$105 \quad \mathbf{I} = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \Delta - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] dV \quad (12.29)$$

$$106 \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N} \quad (12.30)$$

107 と表される。つまり、ニュートンの運動方程式と同様の形で書くことができる。

108

109 12.4 慣性モーメントの例

110 いま、密度が一様な水平な円盤と球を z 軸の周りに働いているトルクが、 z 軸を中心
111 に回転させようする場合を考える。どちらも半径は R であるとする。(12.28)より、考え
112 るべき慣性モーメントは 33-成分である。どちらの場合においても、慣性モーメントは、
113 (12.27)より

$$114 \quad I_{33} = \rho \int_V (x_1^2 + x_2^2) dV \quad (12.41)$$

115 と表される。ただし、円盤の場合の密度は面密度(円盤の厚さは考えていない)を表す。

116 この式の積分ができれば、慣性モーメントを求めることができる。

117 最初に円盤の場合を考える。ここで、円筒座標 (r, ϕ) を用いると、原点からの距離 r は、

118
$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{12.42}$$

119 であり、微小な体積 dV は

120
$$dV = dr \cdot r d\phi = r dr d\phi \tag{12.43}$$

121 である。これらを(12.41)に代入すると、

122
$$I_{33} = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 dr \right) d\phi$$

123
$$= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi$$

124
$$= \rho \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 = \frac{1}{2} MR^2 \tag{12.44}$$

125 となる。ここで、 M は円盤の質量である。

126 球の場合には、次のように考えると円盤の結果を利用できる。球を、半径 r' 、微小な
127 厚さ dz を持つ円盤が z 方向に積み重なった物と考える。この微小な厚さの円盤の慣性
128 モーメントは、(12.44)より

129
$$dI_{33} = \frac{1}{2} \rho \pi r'^2 dz r'^2 \tag{12.45}$$

130 である。ただし、 ρ は面密度でなく、体密度である。これを、

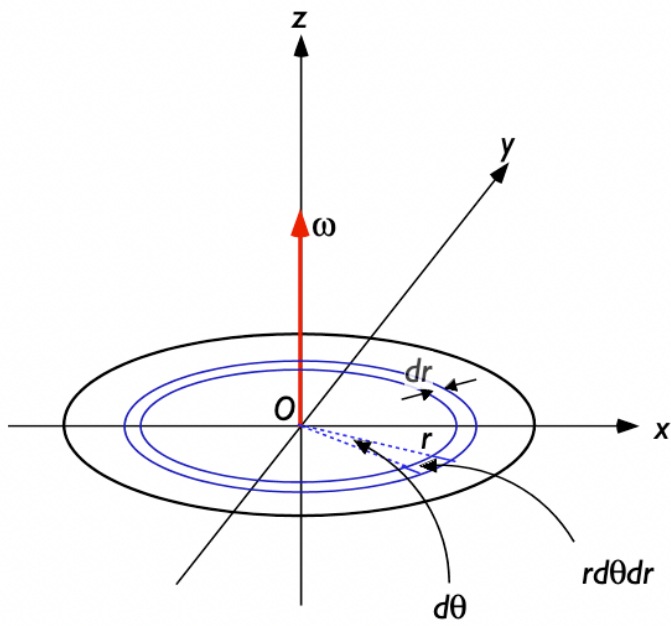
131
$$r'^2 = R^2 - z^2 \tag{12.46}$$

132 に注意して、 $-R$ から R まで積分すると、球の慣性モーメントが得られる。すなわち、

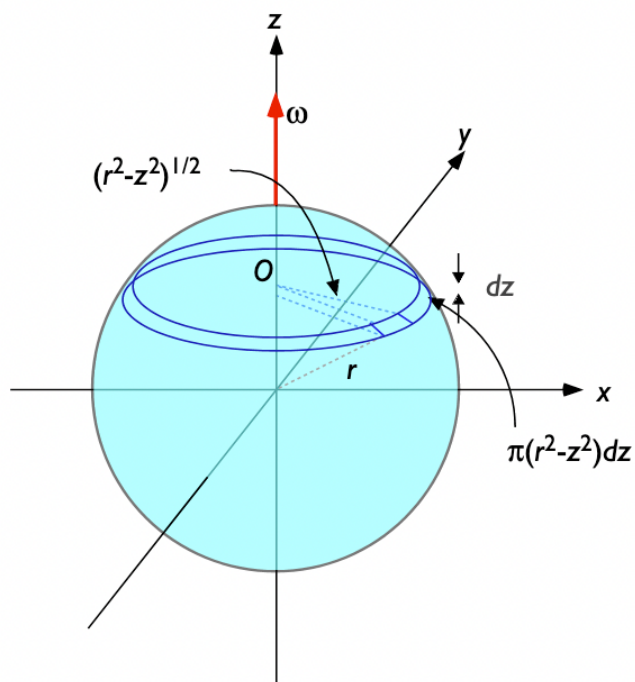
133
$$I_{33} = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2 \tag{12.47}$$

134 である。ここで、 M は球の質量である。

135



136
 137 図 12.5 円盤の慣性モーメントの計算
 138



139
 140 図 12.6 球の慣性モーメントの計算
 141

142 **13. 線積分と面積分**

143 1変数関数の積分はx軸上で積分していると考えることができる。また、2変数関数
144 の積分はx-y平面上における積分である。これらの積分を直線や平面上でなく、一般の
145 曲線や曲面上で行うことを考える。

146

147 **13.1 線積分**

148 一般の曲線を小さい区間に分け、その線長 δl にスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ を掛けて足し合わ
149 せることを考える。

$$150 \quad I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \phi(x_i, y_i, z_i) \delta l_i \quad (13.1)$$

151 ただし、このとき、小さい区間の微少な極限をとると積分となり、

$$152 \quad I = \int_C \phi(x, y, z) dl \quad (13.2)$$

153 のように書くことができる。この積分を弧長に沿う線積分とよぶ。

154 3つのスカラー関数 P, Q, R を考える。この3つに小さい区間の変位ベクトルの $x, y,$
155 z 成分、すなわち $(\delta x, \delta y, \delta z)$ を掛けた和

$$156 \quad I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [P(x_i, y_i, z_i) \delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \delta z_i] \quad (13.3)$$

157 を考える。このとき、変位ベクトルが微小となる極限を考えると積分となり、

$$158 \quad I = \int_C [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz] \\ 159 \quad = \int_C \mathbf{p}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} \quad (13.4)$$

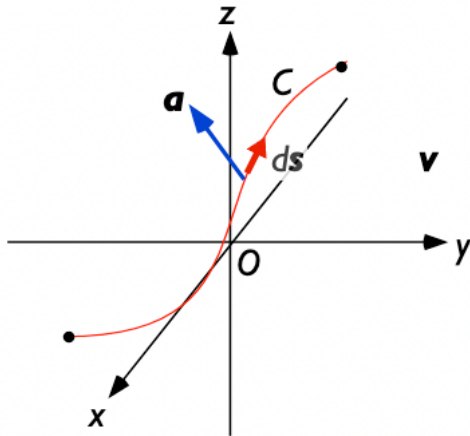
160 と表すことができる。この積分をベクトル関数 \mathbf{p} の線積分とよぶ。ただし、

$$161 \quad d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (13.5)$$

$$162 \quad \mathbf{p}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (13.6)$$

163 である。

164



165

166 図 13.1 線積分

167

168 13.2 ポテンシャル力と位置エネルギー，力学的エネルギーの保存則

169 線積分を使うと，力 f による曲線 C に沿った仕事を一般的な形で表すことができる。

170 すなわち，

171
$$W = \int_C \mathbf{f}(x,y,z) \cdot d\mathbf{s} \tag{13.11}$$

172 である。ここで，重力加速度 \mathbf{g} を重力ポテンシャル ϕ を用いて表すと，

173
$$\mathbf{f}(x,y,z) = m\mathbf{g} = -m\nabla\phi(x,y,z) \tag{13.12}$$

174 と表される。ただし，

175
$$\mathbf{g} = -\nabla\phi(x,y,z) \tag{13.13}$$

176 である。(13.12)を用いると，(13.11)は，

177
$$W = \int_C [-m\nabla\phi(x,y,z)] \cdot d\mathbf{s} \tag{13.14}$$

178
$$= -m \int_C \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \tag{13.15}$$

179
$$= -m \int_C \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \right) \tag{13.16}$$

180
$$= -m \int_C d\phi \tag{13.17}$$

181 すなわち，

182
$$W = -m \int_A^B d\phi = -m[\phi(\mathbf{B}) - \phi(\mathbf{A})] \quad (13.18)$$

183 のように書くことができる。ここで、 ϕ は位置だけの関数であることに注意しよう。す
 184 なわち、仕事は終点と始点の位置だけによって決まっています、途中の経路によらないこ
 185 とを表す。また、 \mathbf{B} を通過して元の \mathbf{A} に戻ったとき、

186
$$W = \oint_C \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B d\phi - \int_B^A d\phi = 0 \quad (13.19)$$

187 となることに注意せよ。このような性質を持つ力はポテンシャル力、あるいは、保存力
 188 とよばれる。また、

189
$$V(\mathbf{x}) = m\phi(\mathbf{x}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} \quad (13.20)$$

190 を位置エネルギーとよぶ。運動エネルギーの保存則

191
$$T(\mathbf{B}) - T(\mathbf{A}) = W \quad (13.21)$$

192 に代入すると、

193
$$T(\mathbf{B}) - T(\mathbf{A}) = -[V(\mathbf{B}) - V(\mathbf{A})] \quad (13.22)$$

194 より、

195
$$T(\mathbf{B}) + V(\mathbf{B}) = T(\mathbf{A}) + V(\mathbf{A}) = \text{const.} \quad (13.23)$$

196 となる。つまり、保存力のみが働く場合には、運動エネルギーと位置エネルギーの和が
 197 常に一定であることを表す。

198

199 13.4 全微分の線積分の計算例

200 いま、2変数関数

201
$$f(x, y) = 2x^4 + x^2y - y^2 + y \quad (13.31)$$

202 を考える。 $f(x, y)$ を x, y で偏微分すると、

203
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 + 2xy \quad (13.32)$$

204
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y + 1 \quad (13.33)$$

205 となるので、全微分は

206 $df = (8x^3 + 2xy)dx + (x^2 - 2y + 1)dy$ (13.34)

207 である。いま、全微分 df を $(0, 0)$ から $(1, 1)$ まで積分することを考える。

208 $f(0, 0) = 0$ (13.35)

209 $f(1, 1) = 2 + 1 - 1 + 1 = 3$ (13.36)

210 であるから、積分の値は経路によらず、

211 $I_C = \int_C df = f(1, 1) - f(0, 0) = 3$ (13.37)

212 のはずである。 $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1)$ の順に積分を実行すると、

213
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} df = \int_{(0,0)}^{(1,0)} df + \int_{(1,0)}^{(1,1)} df$$

214
$$= \int_{(0,0)}^{(1,0)} (8x^3 + 2xy) dx + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (x^2 - 2y + 1) dy$$

215
$$= [2x^4 + x^2y]_{(0,0)}^{(1,0)} + [x^2y - y^2 + y]_{(1,0)}^{(1,1)}$$

216
$$= [2 - 0] + [1 - 0] = 3$$
 (13.38)

217
$$= [f(1, 0) - f(0, 0)] + [f(1, 1) - f(1, 0)]$$

218 となって、(13.37) に一致する。 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$ の順でも

219
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (8x^3 + 2xy) dx + \int_{(0,0)}^{(0,1)} (x^2 - 2y + 1) dy = [3 - 0] + [0 - 0] = 3$$
 (13.39)

220 となり同じ値が求められる。

221

222 13.4 面積分

223 一般の曲線を小さい面に分け、その面積 δS にスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ を掛けて足し合わ
224 せることを考え、面を微小とする極限を考える。すなわち、

225
$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \phi(x_i, y_i, z_i) \delta S_i = \iint_S \phi(x, y, z) dS$$
 (13.41)

226 をスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ の面積分とよぶ。これに対し、ベクトル関数 $\mathbf{a}(x, y, z)$ を考え、面
227 積ベクトル $d\mathbf{S}$ との内積を考えたスカラー量

228
$$I = \iint_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.42)$$

229 をベクトル関数 $\mathbf{a}(x, y, z)$ の面積分という。ここで、 \mathbf{n} は面 S に垂直な単位ベクトル、す
230 なわち単位法線ベクトルである。内積の定義に従うと、

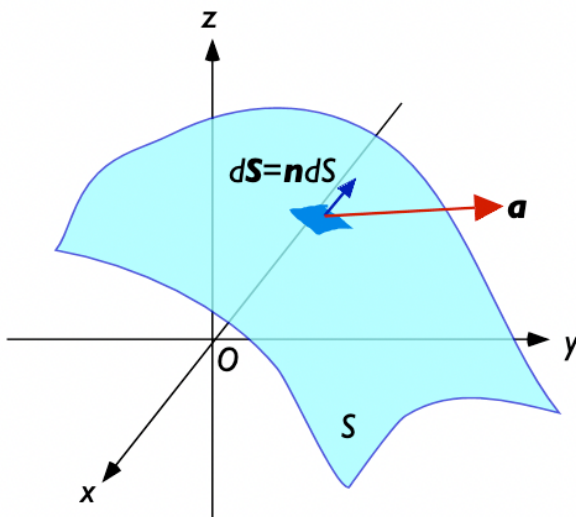
231
$$I = \int_S |\mathbf{a}(\mathbf{x})| \cos\theta dS \quad (13.53)$$

232 である。ここで、 \mathbf{a} は物理量の流束を表すベクトルであると考えると、その絶対値に面
233 とのなす角度の cosine を掛けた量は、単位時間あたりの面を通る物理量の大きさを表
234 す。このため、面積分は面 S を通り過ぎる物理量の単位時間あたりの総量を表している
235 と考えることができる。たとえば、 \mathbf{a} の代わりに熱流束 \mathbf{q} を用いると、

236
$$Q = \int_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.54)$$

237 は面を通る単位時間あたりの熱量を表す。

238



239

240 図 13.3 面積分

241

242 13.4 積分に関する定理

243 閉曲面に対する面積分は体積分に変換することができる。この面積分と体積分の変換
244 に関する定理をガウスの定理という。ベクトル関数の面積分は、ベクトルの発散の体積
245 分に等しくなる。すなわち、

246
$$\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV \quad (13.61)$$

247 と表される。この定理は閉局面内を小さな直方体に分割して足し合わせを考えることに
248 より証明できる。この定理は、スカラー関数やテンソル関数のときにも成立する。

249
$$\oiint_S \phi dS = \iiint_V \nabla \phi dV \quad (13.62)$$

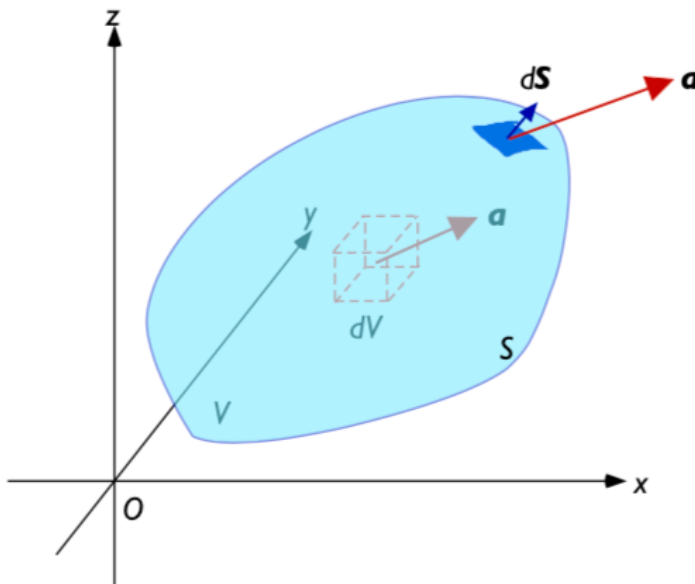
250
$$\oiint_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\mathbf{T} \cdot \nabla) dV \quad (13.63)$$

251 である。

252 閉曲線に対するベクトル関数の線積分は面積分に変換することができる。すなわち、

253
$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \quad (13.64)$$

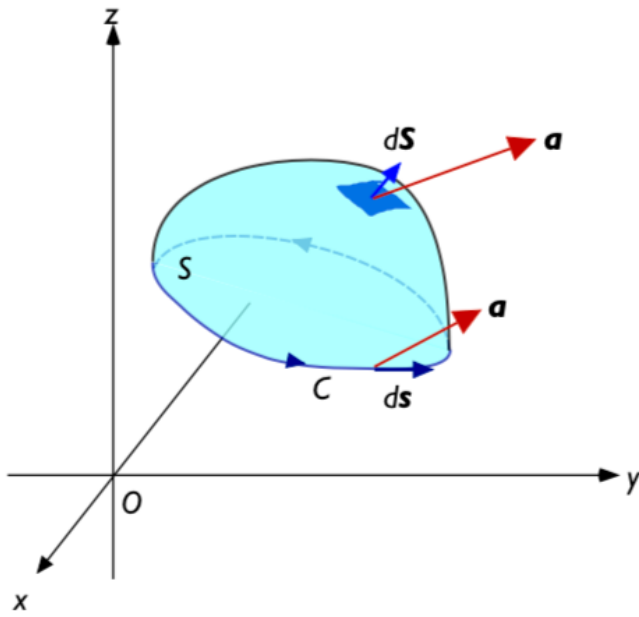
254 である。ただし、面積分を行う面 S は閉曲線 C を外周に持つ開いた曲面であり、その
255 面ベクトル $d\mathbf{S}$ の方向は閉曲線を積分する方向へ回ったとき、右ねじが進む方向である。
256 この変換の定理をストークスの定理とよぶ。



257

258 図 13.4 ガウスの定理

259



260

261 図 13.5 ストークスの定理

262

263

264 13.4 物体内部の重力場：ポワソン方程式

265 ラプラス方程式は物体の外部の重力場を表す方程式である。地球内部のような物体の
 266 内部に適用することはできない。ここでは、物体内部にも適用できる式を作ることを考
 267 える。いま、密度 ρ の微小な体積がつくる重力場(重力加速度)は、

$$268 \quad d\mathbf{g} = -G\rho dV \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (13.71)$$

269 である。この式を物体全体の体積 V で体積分すると物体全体が作る重力場が得られる。

$$270 \quad \mathbf{g} = \int_V d\mathbf{g} = -G \int_V \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV \quad (13.72)$$

271 \mathbf{g} を物体表面の閉曲面 S 上で面積分すると、

$$272 \quad \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \int_V d\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.73)$$

273 となる。(13.71)より、

$$274 \quad \begin{aligned} \int_S \int_V d\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= -G \int_S \int_V \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV \cdot d\mathbf{S} = -G \int_V \rho \int_S \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{S} \right) dV \\ 275 \quad &= -G \int_V \rho \left(\int_S \frac{dS \cos\theta}{r^2} \right) dV = -4\pi G \int_V \rho dV \end{aligned} \quad (13.74)$$

276 となる。ここで、

$$277 \quad d\Theta = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \quad (13.75)$$

278 は立体角とよばれ、曲面を半径 1 の球面上に投影した面積を表す。閉曲面全体で積分す
 279 ると、もちろん半径 1 の球面の面積となる。すなわち、

$$280 \quad \oint_S d\Theta = 4\pi \quad (13.77)$$

281 である。一方、

$$282 \quad \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV = - \int_V \nabla^2 \phi dV \quad (13.78)$$

283 である。ここで、ガウスの定理を用いた。加えて、重力ポテンシャル

$$284 \quad d\mathbf{g} = -\nabla d\phi \quad (13.79)$$

285 を用いている。これが、(13.74)と等しいことにより、

$$286 \quad \int_V (\nabla^2 \phi - 4\pi G\rho) dV = 0 \quad (13.80)$$

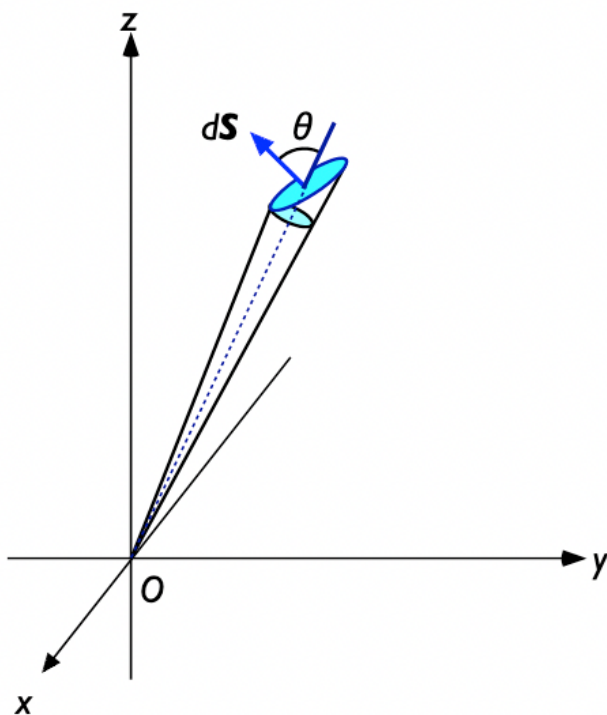
287 となる。任意の体積に対してこの式が成り立つためには、被積分関数が 0 でなければな

288 らない。すなわち、

289
$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{13.81}$$

290 が成り立つ。この式はポワソン方程式(Poisson's Equation)とよばれ、重力場を支配す
291 る方程式を表す。

292



293

294 図 13.6 立体角