IV. ベクトル解析

10. ベクトルの１階微分

全微分のところで登場したナブラ演算子は,

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{10.1}$$

で表されるベクトル演算子である。ここでは，ナブラ演算子をベクトルに演算してベクトルの空間微分を作ることを考える。いま, 場の関数としてのベクトル $\boldsymbol{a}(x,y,z)$を考え，ナブラ演算子をかけ算して，$\boldsymbol{a}$ を微分する。ベクトルとベクトルのかけ算であるので, 内積，外積，直積の３通りの演算が考えられる。

10.1 スカラー関数の勾配

ベクトル演算子を場のスカラー関数ϕに演算することにより，スカラー関数ϕの**勾配** (gradient of scalar ϕ)が

$$\mathrm{grad}\phi(x,y,z)\equiv\nabla\phi(x,y,z)=\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{10.2}$$

得られた。ベクトルとスカラーのかけ算なので，勾配はベクトル量である。

ここでスカラー関数の勾配の意味を考える。話をわかりやすくするため，２変数関数

$$\phi=\phi(x,y) \tag{10.3}$$

を考える。つまり，ϕは地形のような曲面を表す関数である。ϕの全微分は

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{x}=|\nabla\phi||d\boldsymbol{x}|\cos\theta \tag{10.4}$$

と表される。ここで,

$$d\phi=0 \tag{10.5}$$

とすると，ϕが一定であることを表す。このとき，$d\boldsymbol{x}$ に沿って移動すると，その点の集合は，等高線を表す。つまり，$d\boldsymbol{x}$ は走向を表す。(10.5)より，

$$\cos\theta=0 \tag{10.6}$$

であり，すなわち，

$$\theta=\frac{\pi}{2} \tag{10.7}$$

となる。これは，$\nabla\phi$と $d\boldsymbol{x}$ が垂直であることを表す。つまり，$\nabla\phi$は傾斜の最も急な方向を指すベクトルであり，ϕが増加するとき,

$$|\nabla\phi| > 0 \tag{10.8}$$

となることから，$\nabla\phi$は，ϕが増加する方向を向いていることがわかる。また，その大きさ

$$|\nabla\phi|$$

は傾斜の値を表す。

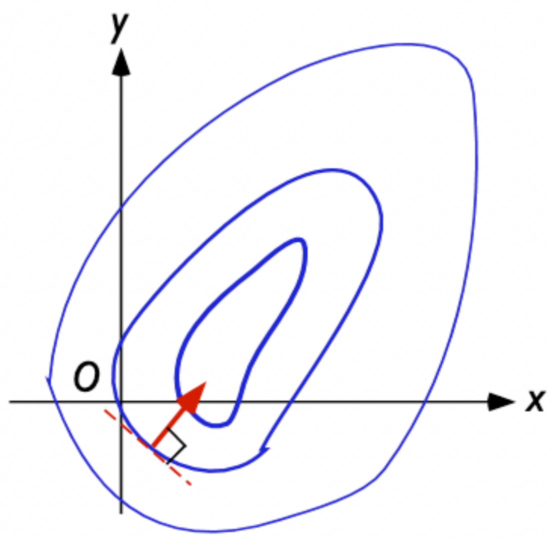

図 10.1　２変数スカラー関数と勾配

10.2 ベクトルの発散

　ナブラ演算子とベクトルの内積により得られるスカラー量

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(x,y,z) = \nabla\cdot\boldsymbol{a}(x,y,z) = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{10.11}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**発散**(divergence of vector a)とよぶ。

　ここで，発散の意味を考える。いま，流体の密度と速度をかけ算した量

$$\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{v}$$

を考える。この量は，単位面積を通過する単位面積あたりの質量を表し，質量流束(mass flux)とよばれる。単位は[kg m^{-2} s^{-1}]である。ここで，ある点の周りの小さな体積δVを考

える。その体積は，

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z \tag{10.12}$$

であり，それぞれの軸に垂直な面積は

$$\delta S_x = \delta y \delta z \tag{10.13}$$

$$\delta S_y = \delta z \delta x \tag{10.14}$$

$$\delta S_z = \delta x \delta y \tag{10.15}$$

で表される。x 軸に垂直な面積δS_xを短い時間δt で横切る質量は

$$a_x\left(x+\delta x, y, z, t\right)\delta S_x \delta t$$

のように計算できる。x 軸に垂直な２つの面から出入りする質量の合計は

$$\begin{aligned}\delta M_x &= a_x\left(x+\delta x, y, z, t\right)\delta S_x \delta t - a_x\left(x, y, z, t\right)\delta S_x \delta t \\ &= \left[a_x\left(x, y, z, t\right) + \frac{\partial a_x}{\partial x}\delta x - a_x\left(x, y, z, t\right)\right]\delta S_x \delta t \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\delta x \delta S_x \delta t = \frac{\partial a_x}{\partial x}\delta V \delta t\end{aligned} \tag{10.16}$$

と計算される。ただし，質量が出ていく方を正に取っている。同様に y 軸に z 軸に垂直な２つの面から出入りする質量の合計は

$$\begin{aligned}&\delta M_y = a_y\left(x, y+\delta y, z, t\right)\delta S_y \delta t - a_y\left(x, y, z, t\right)\delta S_y \delta t \\ &= \frac{\partial a_y}{\partial y}\delta y \delta S_y \delta t = \frac{\partial a_y}{\partial y}\delta V \delta t\end{aligned} \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned}&\delta M_z = a_z\left(x, y, z+\delta z, t\right)\delta S_z \delta t - a_z\left(x, y, z, t\right)\delta S_z \delta t \\ &= \frac{\partial a_z}{\partial z}\delta z \delta S_z \delta t = \frac{\partial a_z}{\partial x}\delta V \delta t\end{aligned} \tag{10.18}$$

となる。ところで，体積の内部にある質量の変化は，密度を用いて

$$\delta M = \rho\left(x, y, z, t+\delta t\right)\delta V - \rho\left(x, y, z, t\right)\delta V = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta t \delta V \tag{10.19}$$

である。すなわち，質量の出入りは内部の密度が変化することによって起こることを表す。質量の変化は面から出入りする質量と等しい(質量の保存，conservation of mass)ので,

$$\delta M = -\left(\delta M_x + \delta M_y + \delta M_z\right) \tag{10.20}$$

が成り立つ。ここで右辺のマイナスは外への質量の流出によって質量が減少することを

表す。この式は，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta t\delta V=-\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\delta t\delta V \tag{10.21}$$

と表される。ここで，右辺の括弧内は質量流束の発散であり，質量流束の発散は単位体積当たりの質量の流出入を表していることに注意しよう。さらに，$\delta V\rightarrow 0$, $\delta t\rightarrow 0$ の極限を取ると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \tag{10.22}$$

となる。ナブラ演算子を用いて表すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{a}=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \tag{10.23}$$

となる。右辺の項を左辺に移項すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{10.24}$$

となる。この式はオイラーの連続の式(equation of continuity)とよばれ，オイラー的な視点による連続体の質量保存則を表す。密度を電荷密度ρ_e とすると，$\rho_e\boldsymbol{v}$ は電流密度ベクトル $\boldsymbol{i}$ であり，式(10.16)は，

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{10.25}$$

となって，Maxwell 方程式から導かれる電荷の保存則となる。

左辺を変形すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})&=\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\nabla\rho)\cdot\boldsymbol{v}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\&=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\rho)+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\&=\frac{D\rho}{Dt}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{10.26}$$

となる。この表現を用いると式(10.16)は

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0 \tag{10.27}$$

と表される。質量保存則のラグランジュ的な表現であり，ラグランジュの連続の式とよばれる。式(10.18)を密度で割って発散の項を右辺に移項すると，

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{10.28}$$

となる。ここで左辺は単位密度あたりの密度の変化率であり，単位体積当たりの体積の変化率を逆符号にした物と等しい。すなわち，

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} \tag{10.29}$$

である。これを用いると，速度の発散は

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{10.30}$$

となり，単位体積当たりの体積の変化率を表していることが分かる。

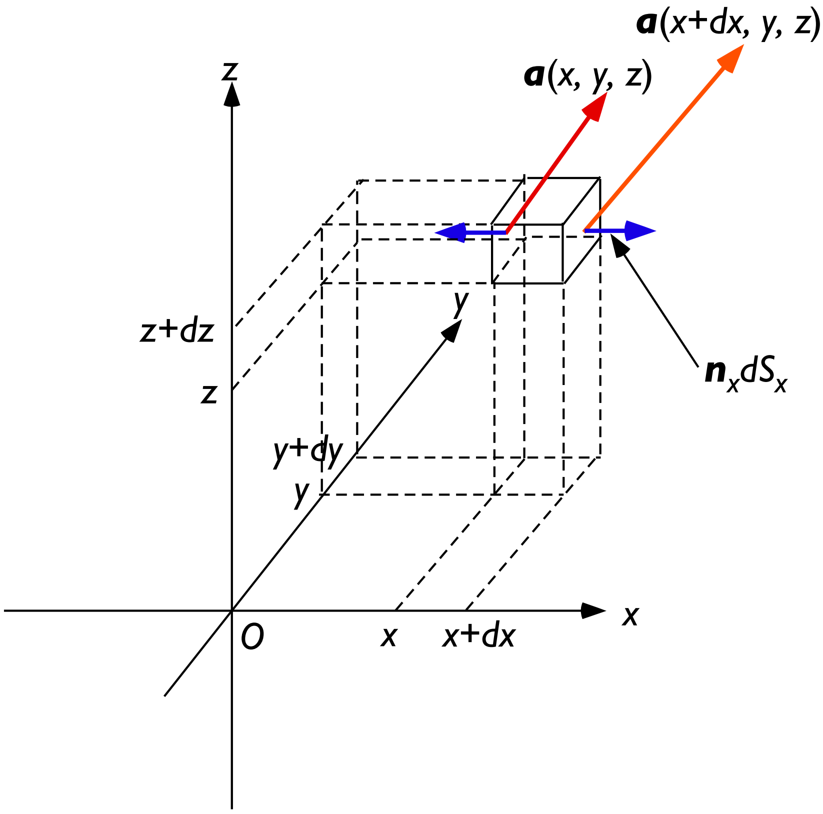

図 10.2　ベクトルの発散とその意味：質量保存の法則

10.3 ベクトルの回転

ナブラ演算子とベクトルの外積により得られるベクトル量

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(x,y,z)=\nabla\times\boldsymbol{a}(x,y,z)=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{10.41}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**回転**(rotation of vector a)という。

　ここで，ベクトルの回転の意味を次のように考える。いま，一定の角速度ωで回転する円盤を考える。回転軸が z 軸方向であるとすると，回転は角速度ベクトル

$$\boldsymbol{\omega}=\left(0,0,\omega_z\right)=\omega\boldsymbol{k} \tag{10.42}$$

で表される。このとき回転の方向は右ねじが z 軸方向に進む向きであることに注意しよう。いま，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r}=\left(x,y,0\right)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \tag{10.43}$$

である。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\left(v_x,v_y,0\right)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=-r\omega\sin\theta\boldsymbol{i}+r\omega\cos\theta\boldsymbol{j}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j} \tag{10.44}$$

であり，この式から，$\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}=\omega\boldsymbol{k}\times\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\right)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{10.45}$$

と表せることが分かる。$\boldsymbol{v}$ の回転をとると，(10.25)を用いて

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial\omega x}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial(-\omega y)}{\partial z}-\frac{\partial 0}{\partial x}\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial\omega x}{\partial x}-\frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \tag{10.46}$$

すなわち，

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\omega\boldsymbol{k} \tag{10.47}$$

となる。つまり，速度の回転は角速度の２倍となっている。流体のように速度が連続的に変化する場合，速度の回転

$$\boldsymbol{\zeta}(x,y,z)=\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{10.48}$$

は局所的な剛体回転(の２倍の値)を表し，渦度(vorticity)とよばれる。

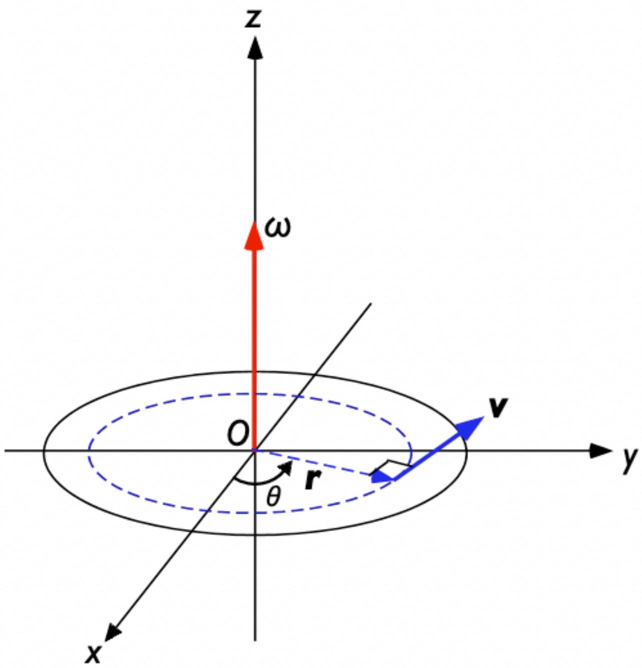

図 10.3　ベクトルの回転とその意味：剛体の回転と角速度

10.4 ベクトルの勾配

ナブラ演算子とベクトルの直積により得られる２階テンソル量を作ることを考える。直積をとる場合には，$\boldsymbol{a}$ の前から演算する場合と，$\boldsymbol{a}$ の後ろから演算する場合の２通りを考えることができる。すなわち，

$$\nabla \otimes \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a}^T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{10.51}$$

$$\boldsymbol{a} \otimes \nabla = \boldsymbol{a}\nabla^T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{10.52}$$

である。成分はそれぞれ，

$$(\nabla \otimes \boldsymbol{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \tag{10.53}$$

$$(\boldsymbol{a} \otimes \nabla)_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \tag{10.54}$$

となっている。

ここで，流動の速度 $\boldsymbol{v}$ を考える。$\boldsymbol{v}$ を場所の関数とすると，位置 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ における速度の成分は，

$$v_i(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})=v_i(\boldsymbol{x})+dv_i=v_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j \tag{10.55}$$

である。ここで，右辺第２項は v_i の空間における全微分

$$dv_i=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial v_i}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial v_i}{\partial x_3}dx_3 \tag{10.56}$$

である。ここで，偏微分の部分は式(10.33)と同様になっている。ベクトルとナブラ演算子を用いて書くと，

$$d\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\otimes\nabla)\cdot d\boldsymbol{x} \tag{10.57}$$

ここで,

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\otimes\nabla \tag{10.58}$$

は速度の全微分係数に当たる量であり，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の勾配である。このため，$\boldsymbol{F}$ を速度勾配テンソルとよぶ。成分で書くと，

$$F_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{10.59}$$

である。このテンソルを対称テンソルと反対称テンソルに分けると，

$$F_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{10.60}$$

となる。ここで,

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{10.61}$$

$$W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{10.62}$$

とする。ベクトルを用いて書くと，

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\otimes\nabla+\nabla\otimes\boldsymbol{v}) \tag{10.63}$$

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\otimes\nabla-\nabla\otimes\boldsymbol{v}) \tag{10.64}$$

と表される。すなわち，速度勾配テンソルはこれら２つのテンソルに分解される。

$$F_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \tag{10.65}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W} \tag{10.66}$$

ところで，式(10.36)は結局，

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}\right) \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{10.67}$$

となる。次は，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{W}$ の意味を考えてみよう。

dt の間における $d\boldsymbol{x}$ の長さの２乗の変化は

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}'^2 - d\boldsymbol{x}^2 &= \left(d\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{v}dt\right)^2 - d\boldsymbol{x}^2 \\ &= 2d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{v}dt + d\boldsymbol{v}^2 dt^2 \\ &\simeq 2d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dt = 2d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}dt \end{aligned} \tag{10.68}$$

である。dt の２乗がある項は無視している。成分で表すと，

$$\begin{aligned} dx'^2 - dx^2 &= 2dt\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= 2dt\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}dx_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx_j + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}dx_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx_j\right] \end{aligned} \tag{10.69}$$

ここで，２番目の項は０となることに注意しよう。すなわち，$\boldsymbol{W}$ は長さの変化と関係がない。したがって，

$$\begin{aligned} dx'^2 - dx^2 &= 2dt\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}dx_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx_j \\ &= 2dt\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} dx_i D_{ij} dx_j \end{aligned} \tag{10.70}$$

すなわち，

$$d\boldsymbol{x}'^2 - d\boldsymbol{x}^2 = 2d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{x}dt \tag{10.71}$$

である。したがって，$\boldsymbol{D}$ のみが長さの変化に寄与し，単位時間あたりの局所的な長さの変化率を表す。長さの変化率は変形，すなわち歪(ひずみ)を表す。単位時間あたりの量つまり速さを表すため，$\boldsymbol{D}$ は歪速度テンソルとよばれる。その成分は，

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_x}\right) \tag{10.72}$$

である。

今度は，(10.67)の右辺第２項を成分で書くと，

$$\left(\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{x}\right)_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dx_j \tag{10.73}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\Bigg\{&\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)dx_3 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)dx_2\right]\boldsymbol{i} \\ &+\left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)dx_1 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)dx_3\right]\boldsymbol{j} \\ &+\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)dx_2 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)dx_1\right]\boldsymbol{k}\Bigg\}\end{aligned} \tag{10.74}$$

となる。小括弧の中を回転テンソル成分で書くと，

$$\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{x} = \left(W_{13}dx_3 - W_{21}dx_2\right)\boldsymbol{i} + \left(W_{21}dx_1 - W_{32}dx_3\right)\boldsymbol{j} + \left(W_{32}dx_2 - W_{13}dx_1\right)\boldsymbol{k} \tag{10.75}$$

である。同時に渦度ベクトルの成分であることに注意すると，

$$\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\left[\left(\zeta_2 dx_3 - \zeta_3 dx_2\right)\boldsymbol{i} + \left(\zeta_3 dx_1 - \zeta_1 dx_3\right)\boldsymbol{j} + \left(\zeta_1 dx_2 - \zeta_2 dx_1\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{10.76}$$

結局

$$\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\times d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega}\times d\boldsymbol{x} \tag{10.77}$$

となり，局所的な剛体回転速度を表していることが示される。このため，$\boldsymbol{W}$は回転テンソルあるいはスピンテンソルとよばれる。ここで，回転テンソルの成分は渦度ベクトルを使用して

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.78}$$

と表すことができる。

歪を考える場合には, $\boldsymbol{v}dt$ の代わりに, 変位 $\boldsymbol{u}$ を用いる。変位が大きい場合には, (10.68) のように２乗の項を無視することができない。このような歪を有限歪という。岩石の弾性変形のように変位が非常に小さい場合には，この項を無視することができる。このような歪は無限小歪とよばれ，$\boldsymbol{\varepsilon}$ で表す。無限小歪の表式は歪速度テンソルの速度成分を小さい変位 $\boldsymbol{u}$ の成分で置き換えたものと同じである。すなわち，

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_x}\right) \qquad (10.79)$$

である。

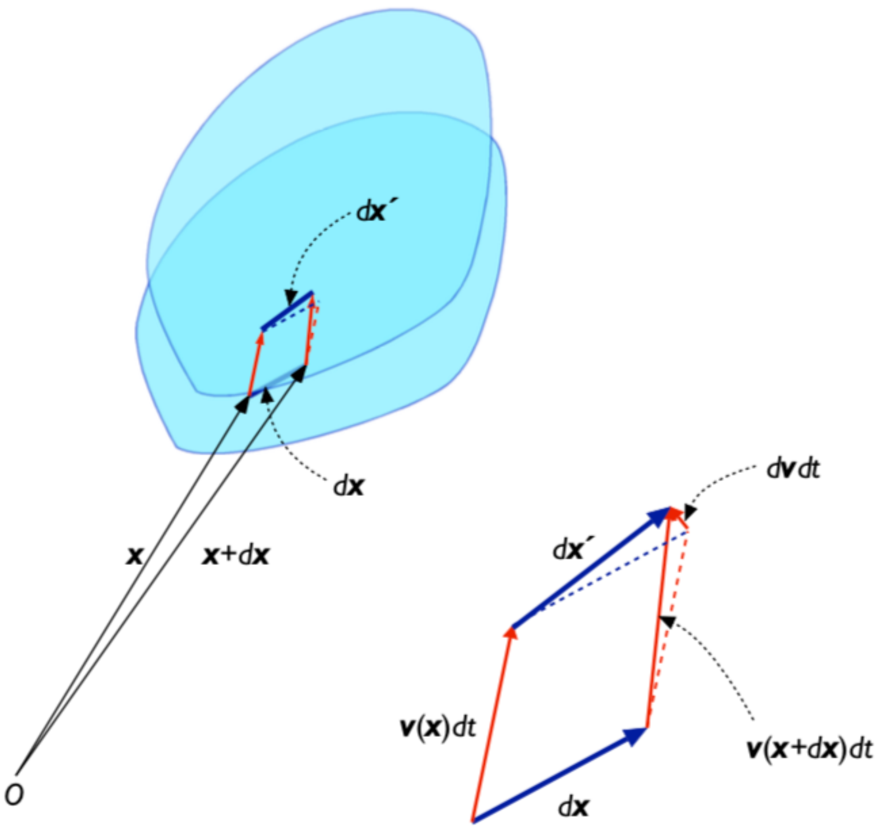

図 10.4　連続体の変形と回転：微小ベクトルの伸縮と回転

10.5 積の微分

スカラーの積，スカラーとベクトルの積，あるいはベクトルとベクトルの積を微分すると次のよう公式が得られる。

スカラーの積の勾配は

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{10.81}$$

となる。スカラーとベクトルの積の回転は

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=\nabla\phi\times\boldsymbol{a}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{10.82}$$

である。ベクトルとベクトルの外積の発散は

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{10.83}$$

ベクトルとベクトルの内積の勾配は

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{10.84}$$

ベクトルとベクトルの直積の発散は

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} \tag{10.85}$$

である。

１１．ベクトルの２階微分

ここでは，ナブラ演算子をベクトルに２回かけることにより，２階微分を作ることを考える。

11.1 ラプラスの演算子

　ナブラ演算子２つの内積を作ると，２階微分のスカラー演算子

$$\Delta\equiv\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{11.1}$$

すなわち，

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11.2}$$

が得られる。この演算子をラプラス演算子(Laplacian)といい，上向きの三角形Δで表す。ラプラス演算子をスカラー関数に演算すると，

$$\Delta\phi(x,y,z)=\nabla^2\phi(x,y,z)=\nabla\cdot\nabla\phi(x,y,z)=\nabla\cdot\left(\nabla\phi(x,y,z)\right) \tag{11.3}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (11.4)$$

となる。この形は重力場の方程式や，熱伝導方程式など，多くの方程式で見ることができる。たとえば，真空中の重力ポテンシャルは，ラプラス方程式，

$$\nabla^2 \phi(x,y,z) = 0 \qquad (11.5)$$

で表される。

　ラプラス演算子をベクトルに演算すると，

$$\Delta \boldsymbol{a}(x,y,z) = \nabla^2 \boldsymbol{a}(x,y,z)$$

$$= \boldsymbol{i}\nabla^2 a_x + \boldsymbol{j}\nabla^2 a_y + \boldsymbol{k}\nabla^2 a_z \qquad (11.6)$$

が得られる。このように計算することができるのは，デカルト座標系のみである。曲線座標におけるベクトルのラプラシアンは次の項の３番目の関係から計算する。

11.2 スカラーおよびベクトルの２階微分

　ナブラ演算子を演算してできたベクトルをさらに微分することを考える。まず，スカラー関数の勾配の回転をとると，

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \qquad (11.7)$$

である。ベクトルの回転の発散は

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0 \qquad (11.8)$$

であり，やはり 0 となる。ベクトルの回転の回転は，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a} \qquad (11.9)$$

という関係が成り立つ。この式を変形すると，

$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \qquad (11.10)$$

となるが，曲線座標系におけるベクトルのラプラシアンを求めるのに用いられる。