III. ベクトル

８．ベクトルとベクトルの代数

大きさと方向を持つ量であるベクトルとその計算について復習する・

8.1 ベクトルとスカラー

スカラーとは大きさのみを持つ量のことである。一方，ベクトルは大きさと方向を持つ量である。ベクトルは定義される空間の次元と同じ数の成分を持つ。3次元空間の場合には，

a $\vec{a}$ $\underline{a}$

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{8.2}$$

のように書くことができる。第I章で述べたようにベクトルは太字や矢印付き記号で表す。特に，始点を原点に持つ位置を示すベクトルは位置ベクトルとよばれる。ベクトルの大きさは三平方の定理より，

$$a = |\boldsymbol{a}| = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2} \tag{8.3}$$

となる。

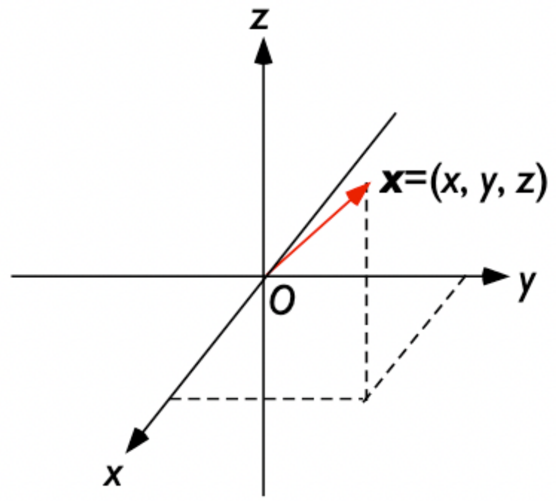


図8.1　位置ベクトル

8.2 基本ベクトル

座標軸と同じ方向の単位ベクトルを基本ベクトルという。すなわち,

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0) \tag{8.4}$$

$$\boldsymbol{j}=(0,1,0) \tag{8.5}$$

$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$\boldsymbol{k}=(0,0,1) \tag{8.6}$$

である。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ のほか,$\boldsymbol{e}_1$ や $\boldsymbol{e}_x$ 等で表すことも多い。デカルト座標系では基本ベクトルの向きは同じであるが,曲線座標系の場合,場所によって方向が異なる。

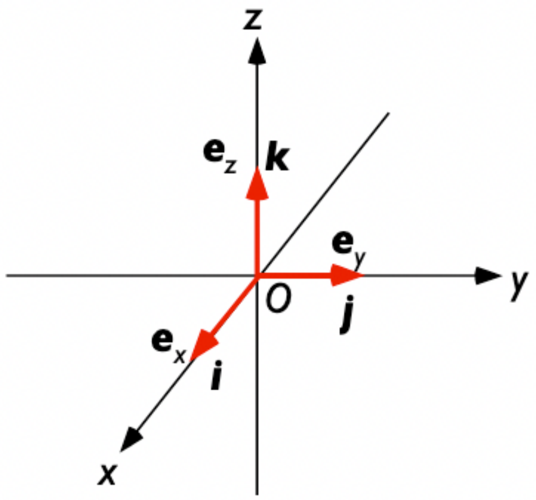


図8.2　デカルト座標系の基本ベクトル

8.3 零ベクトル

大きさが 0 のベクトルで,大きさだけでなく,方向も持たないベクトルである。単に $\boldsymbol{0}$ で表す。

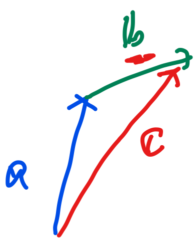
8.4 ベクトルの代数

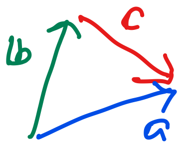
・ベクトルの和と差

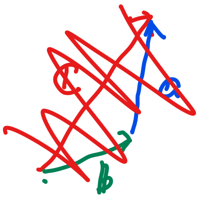
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{8.7}$$

$$c_i = a_i + b_i \tag{8.8}$$

$c - a = b$





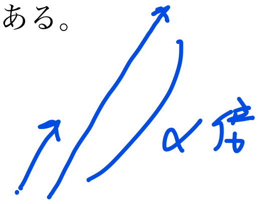


$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \tag{8.9}$$

$$c_i = a_i - b_i \tag{8.10}$$

すなわち，ベクトルの成分それぞれの和と差である。

・ベクトルのスカラー倍



$$\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} \tag{8.11}$$

$$b_i = \alpha a_i \tag{8.12}$$

それぞれの成分のα倍である。つまり，方向が同じで大きさがα倍となる。

・演算法則

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{8.13}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{8.14}$$

$$\alpha(\beta \boldsymbol{a}) = \alpha\beta \boldsymbol{a} = \beta(\alpha \boldsymbol{a}) \tag{8.15}$$

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{a} \tag{8.16}$$

$$\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha \boldsymbol{a} + \alpha \boldsymbol{b} \tag{8.17}$$

(8.13)は交換法則，(8.14)と(8.15)は結合法則，(8.16)と(8.17)は分配法則である。

ベクトル ×ベクトル → スカラー 内
→ ベクトル 外
→ テンソル 直

9．ベクトルの積

9.1 ベクトルの内積

ベクトルの内積はスカラー積ともよばれる。内積は，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{9.1}$$

ドット

と定義される。この定義から，内積が，１つのベクトルへの射影を作り，その射影の長さと射影されるベクトルの長さを掛けた値であることが分かる。基本ベクトルの内積は定義から，　$\cos\theta = 1$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{9.2}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{9.3}$$

$\cos\theta = 0$

となる。内積はベクトルの成分を用いて

アインシュタインの規約

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i \tag{9.4}$$

と表される。

work

内積の例として仕事がある。仕事は，力 $\boldsymbol{F}$ が一定で，動きが直線のとき，$\boldsymbol{l}$ を始点と終点を結ぶベクトルであるとすると，

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l} \tag{9.5}$$

と表される。この式から，仕事が力の $\boldsymbol{l}$ 方向の大きさと動かした距離の積であることが分かる。$\boldsymbol{F}$ が一定でない，あるいは運動が直線でないときには，変位を微少とすることにより，

$$dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{9.6}$$

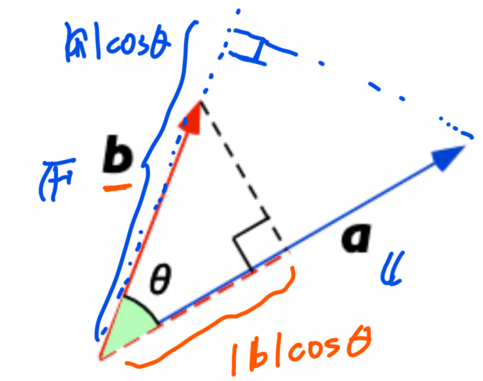
始点 $\boldsymbol{r}$ から終点 $\boldsymbol{q}$ まで積分することにより，

$$W = \int_{r}^{q} dW = \int_{r}^{q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{9.7}$$

終

始

が得られる。この積分については積分の章で説明する。



$\cancel{F(x)dx}$

$\int_a^b f(x)dx$

dF

図 9.1　ベクトルの内積

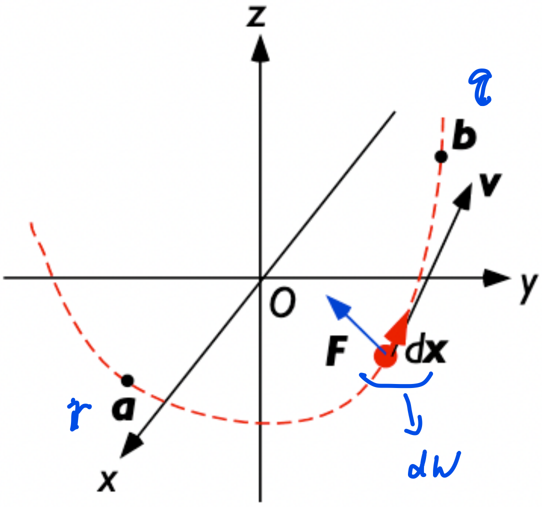


図 9.2　力と仕事。

9.2　運動エネルギーと仕事：力学的エネルギー保存則

運動方程式　ニュートン第2

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{9.8}$$

の両辺に速度を掛けて内積を作ると，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{9.9}$$

となる。dt を両辺に掛けて

$$m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt \tag{9.10}$$

さらに，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{v} \tag{9.11}$$

$v\,dt = dx$

を考慮すると，

$$m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{9.12}$$

となる。この式を始点 $\boldsymbol{r}$ から終点 $\boldsymbol{q}$ まで積分する。

$$\int_r^q m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}=\int_r^q \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{9.13}$$

積分を実行すると，　W

$v \cdot v = v^2$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_r^q = W \tag{9.14}$$

始点 $\boldsymbol{r}$ から終点 $\boldsymbol{q}$ における速度をそれぞれとすると，

$$\frac{1}{2}mv_q^2 - \frac{1}{2}mv_r^2 = W \tag{9.15}$$

ここで，

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{9.16}$$

は運動エネルギーとよばれる量である。T を用いると，

$$T(\boldsymbol{q}) - T(\boldsymbol{r}) = W \tag{9.17}$$

となり，運動エネルギーの変化は与えた仕事 W と等しいことを表す。

$$W = 0 \tag{9.18}$$

のときはエネルギーの変化が零，すなわちエネルギー一定となる。この関係は力学的エネルギー保存則とよばれる。

9.3 ベクトルの外積

ベクトルの外積は，ベクトル積ともよばれ，次のように定義される。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\hat{\boldsymbol{c}} \tag{9.19}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{c}}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直で，$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}$ に右ねじを回したときに進む方向を向く単位ベクトルである。その大きさは２つのベクトルで作られる平行四辺形の面積と等しい。基本ベクトルの外積は定義より，

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0 \tag{9.20}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \tag{9.21}$$

$i \to j \to k \to i$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \cancel{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{j} \tag{9.22}$$

$- \, i \times k \, -$

となる。これを利用すると，外積は成分を用いて

123

$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad 3$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k} \tag{9.23}$$

$1 \quad 2 \quad 3$

と書くことができる。

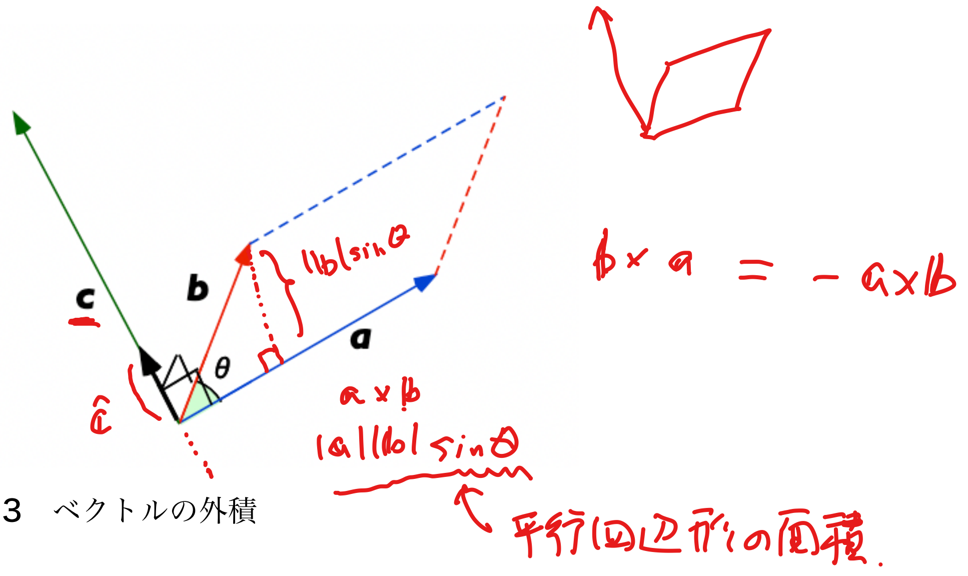


図 9.3　ベクトルの外積

9.4 力のモーメントと角運動量の保存

ニュートンの運動方程式,

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{9.24}$$

$\frac{dv_1}{dt}\,i+\frac{dv_2}{dt}\,j+\frac{dv_3}{dt}\,k$

は運動量

$\frac{dv_x}{dt}\,i+\frac{dv_y}{dt}\,j+\frac{dv_z}{dt}\,k$

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{9.25}$$

を用いると,

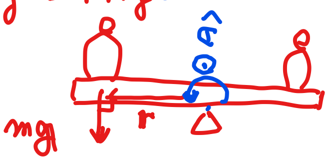
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{9.26}$$

とあらわされる。上式に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を左側から掛けて外積を作ると,

$\sin\theta = 1$

$r \times mg = rmg\,\hat{c}$

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{9.27}$$



となる。右辺の量

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{9.28}$$

は力のモーメントとよばれる量である。いま, 位置ベクトルと運動量の外積 $\boldsymbol{l}$ を考える。

トルク

すなわち,

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{9.29}$$

である。$\boldsymbol{l}$ は角運動量とよばれるベクトル量である。ここで, $\boldsymbol{l}$ を時間で微分すると,

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=0+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{9.30}$$

となるので, (9.27)の左辺に一致する。つまり,

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{9.31}$$

が成り立つ。力のモーメントに比例して角運動量が増加することを表す。特に，

$$\boldsymbol{N} = 0 \tag{9.32}$$

のときは，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = 0 \tag{9.33}$$

となり，角運動量が一定となる。この関係は角運動量保存則とよばれる。

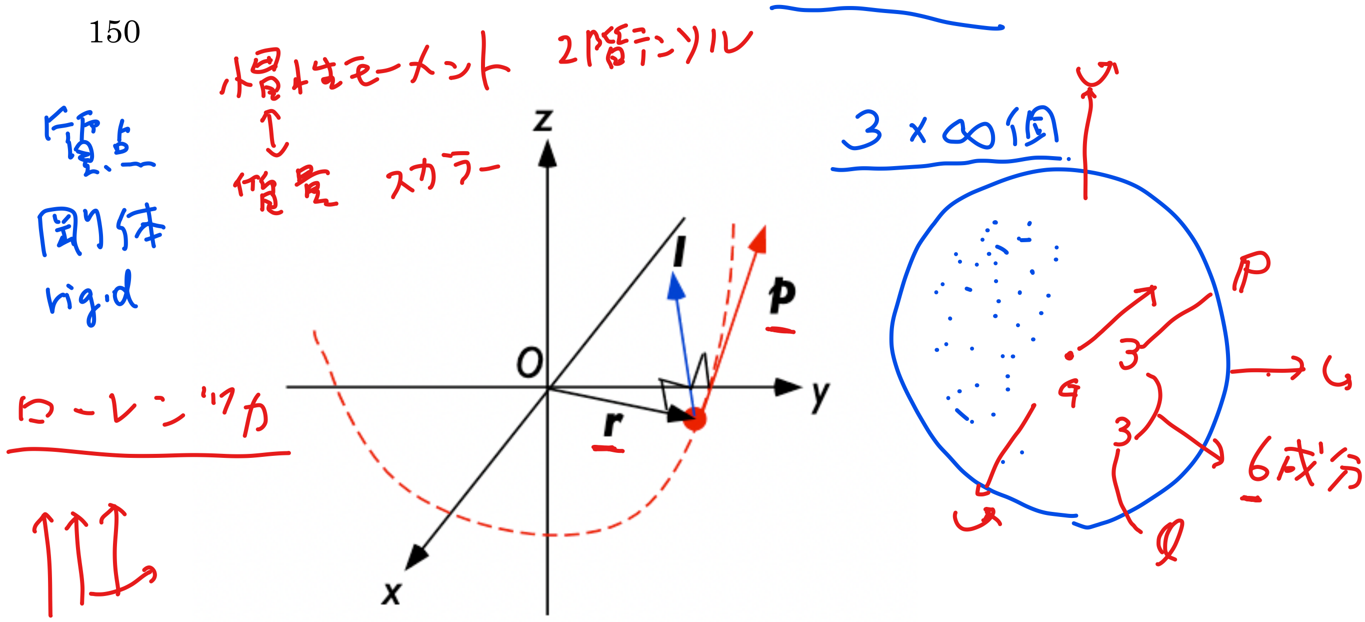


図 9.3　角運動量。$\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ 両方に垂直である。

9.5 ベクトルの直積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の i 成分と $\boldsymbol{b}$ の j 成分から作る積を**直積**(ダイアド)よび，それを ij 成分とする２階テンソルを**ダイアディック**という。つまり，

$a_i b_j$

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{9.34}$$

である。ここで，右辺の $\boldsymbol{a}$ は列ベクトル，$\boldsymbol{b}^T$ は列ベクトルを表している。基本ベクトルの直積は

転置

$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$ transpose

$$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

$$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.36}$$

などである。つまり，ダイディックの成分は

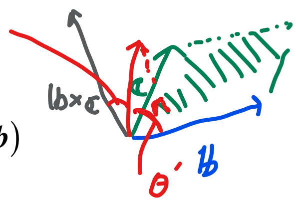
$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j \tag{9.37}$$

で表される。

9.5 ベクトルの三重積

cos θ

３つのベクトルから作られる積



a→b→c

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{9.38}$$

内 外

をスカラー三重積という。スカラー三重積は３つのベクトルが作る平行６面体の体積を表す。また，

$|a||b\times c|\cos\theta = |a||b\times c|\sin\theta'$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{9.39}$$

をベクトル三重積とよぶ。(9.39)に

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{9.40}$$

を用いると，

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{9.41}$$

が導かれる。(9.39)と(9.41)から，

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{9.42}$$

が分かる。すなわち，ベクトル三重積に対して結合法則が成り立たない。(9.39)を用いると，

a→b→c

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{9.43}$$

が成り立つ。この関係はヤコビの恒等式とよばれる。