# II. 微分法

物理量の連続的な変化を表すために考えられた数学的な方法が微分法および積分法である。微分法では，関数の変数(引数)が無限に小さい変化をしたときの関数の値の微少な変化に注目する。

## ６．１変数関数の微分

ここでは，変数を 1 つだけ持つ 1 変数関数の微分を考える。

### 6.1 微分と 1 変数関数の微分

1 変数関数は変数を 1 つだけ持つ関数である。すなわち，

$$y = f(x) \tag{6.1}$$

のような関数 $f(x)$である。ここで，$x$ が微少な(無限に小さい)変化をする場合を考える。無限に小さい差のことを**微分**(differential)という。$x$ の微分は

$$dx$$

で表される。この微小な $x$ の変化に対して関数は

$$df = f(x+dx) - f(x) \tag{6.2}$$

だけ微少な変化をする。このときの関数の変化率を**微分係数**とよび，微分係数は $x$ の関数であり，**導関数**(derivative)とよばれる。導関数は無限小の量を持つ微分の比であり，有限の量をもつ。すなわち，

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{6.3}$$

である。導関数を求めることを，関数を微分するという。また，微分を足し合わせて有限の量(の関数)を作ることを積分とよぶ。導関数をさらに微分した関数は２階微分係数あるいは２階導関数とよばれる。すなわち，

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{6.4}$$

である。

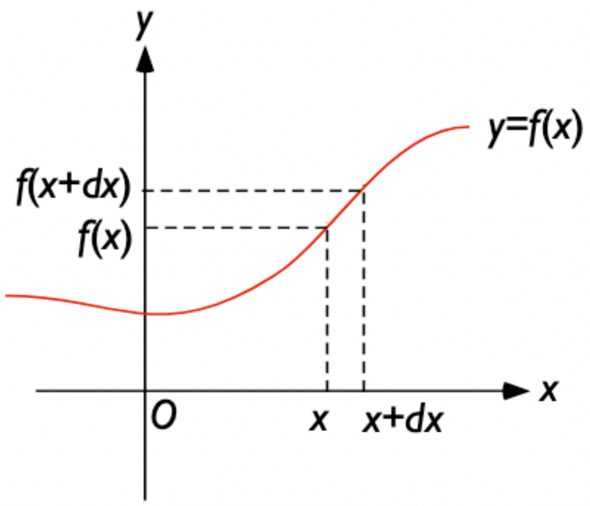


図 6.1　微分と導関数

## 6.2 テイラー展開

連続な関数はある点 $x_0$ と $x$ の差のべき級数として表すことができる。その級数をテイラー級数とよぶ。今，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{6.5}$$

とすると，係数 $a_n$ は

$$a_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \tag{6.6}$$

と表すことができる。ここで，

$$\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

は $f(x)$ の $n$ 階微分の $x=x_0$ での値である。テイラー級数を展開して書くと，

$$f(x)=f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}(x-x_0)^n+\cdots \tag{6.7}$$

である。$x_0=0$ のときのテイラー展開はマクローリン展開とよばれる。

## ７．多変数関数の微分

ここでは，変数を２つ以上持つ多変数関数の微分を考える。複数の変数のうち，変数を１つだけ変化させる場合と，すべて変化させる場合を考える。

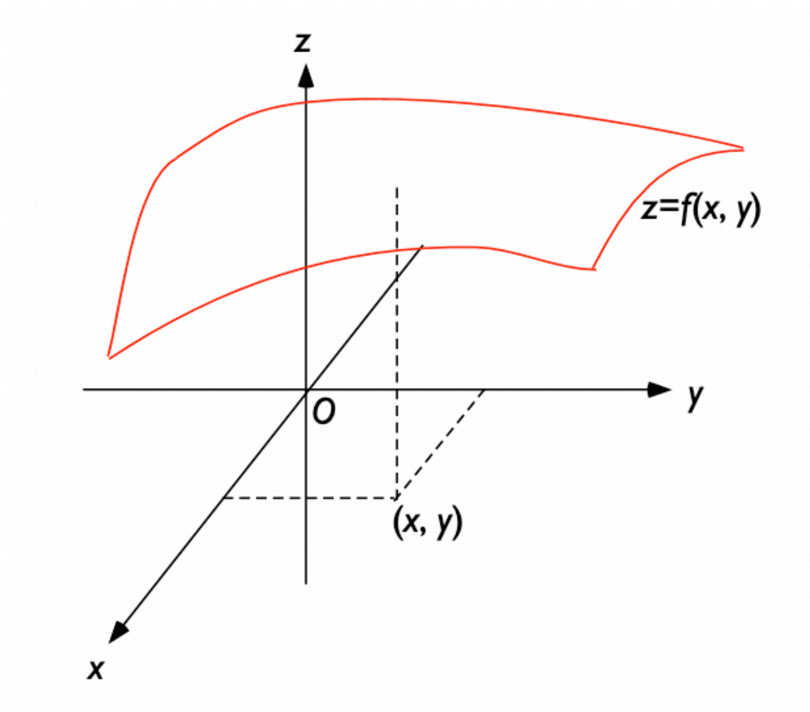


図 7.1　２変数関数

### 7.1 偏微分係数

変数１つだけに注目し，その微少な変化に対する関数の変化率を表す微分係数を**偏微分係数**あるいは**偏導関数**(partial derivative)とよぶ。すなわち，

$$f_x(x,y,z,t)=\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x,y,z,t)-f(x,y,z,t)}{\delta x} \tag{7.7}$$

である。この例のように時空間の関数のときにはこのほかに３つの偏微分係数を定義することができる。

### 7.2 全微分と関数の勾配

すべての変数を同時に変化させたときの関数の微小な変化を**全微分**とよび，$df$ で表す。すなわち，

$$df=f(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)-f(x,y,z,t) \tag{7.8}$$

のことである。このとき，$df$ は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{7.9}$$

いま，関数が空間座標のみを変数に持つ場合を考える。このとき全微分は，

$$\begin{aligned} df &= f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{7.10}$$

である。右辺は２つのベクトル

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{7.11}$$

と

$$d\boldsymbol{x} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} \tag{7.12}$$

との内積である。前者のベクトルは $x$, $y$, $z$ 成分がそれぞれの偏微分係数となっている。このベクトルを(スカラー)関数 $f$ の**勾配** (gradient) とよび，**ナブラ演算子**∇を用いて

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{7.13}$$

と表す。このとき全微分は

$$df = \nabla f \cdot d\boldsymbol{x} \tag{7.14}$$

と表される。この式は 1 変数関数のときの

$$df = f'(x)dx \tag{7.15}$$

に対応すると見ることができる。つまり，関数の勾配は微分係数とも考えることができる。

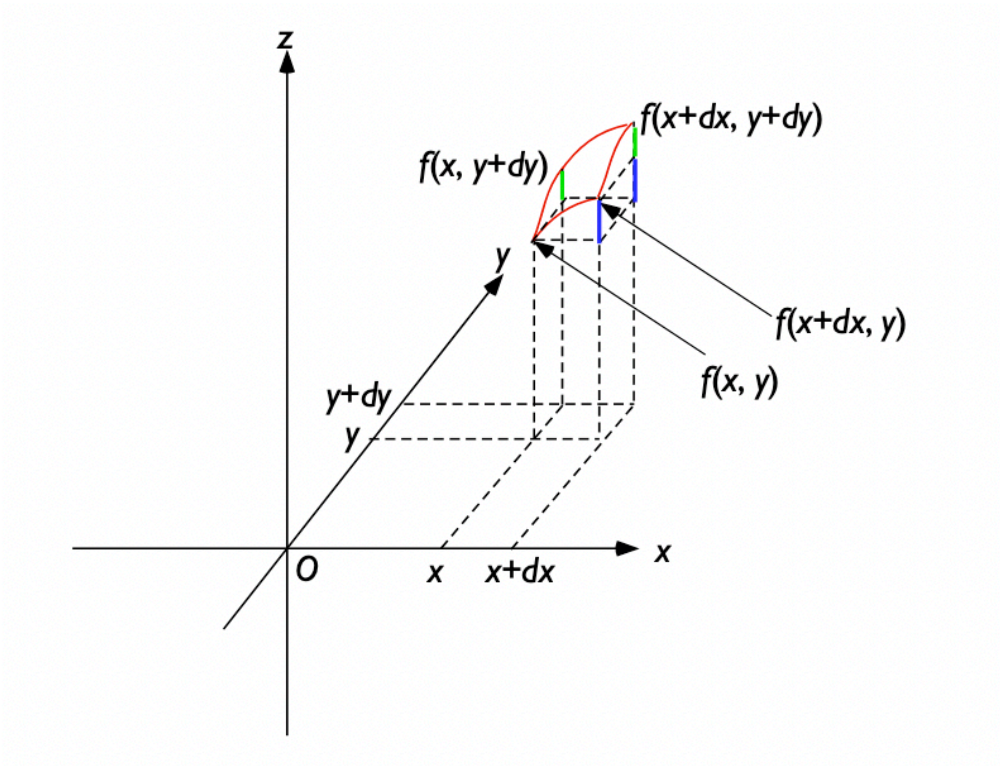


**図 7.2**　全微分。青と緑を合わせた微小な変化。

## 7.3 合成関数の微分

$x$ が時間 $t$ の関数であるとき，$f(x(\mathrm{t}))$を $t$ の合成関数とよぶ。この関数は $t$ で微分することが可能である。この微分係数は

$$\frac{df}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{df}{dx}=v\frac{df}{dx} \tag{7.16}$$

と表される。

## 7.4 流体とともに移動する点における時間微分：物質微分

ここで，流れの中にある温度のような物理量を考える。温度は場の関数であり，

$$T=T\left(x,y,z,t\right) \tag{7.17}$$

のように表される。ここで，時間 t に対する偏微分は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{T\left(x,y,z,t+\delta t\right)-T\left(x,y,z,t\right)}{\delta t} \tag{7.18}$$

である。この偏微分係数は位置を固定した場合の温度の時間変化率を表している。今，流れとともに動く点の時間変化を考える。位置が流れにのって

$$\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}(t+\delta t) = \boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x} \tag{7.19}$$

のように動いたとする。温度は,

$$T(x,y,z,t) \to T(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) \tag{7.20}$$

のように変化する。このとき，$T$ の変化は

$$\delta T = T(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) - T(x,y,z,t) \tag{7.21}$$

と表される。この量は，$\delta t \to 0$ のとき，$T$ の全微分となる。すなわち，

$$dT = T(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - T(x,y,z,t) \tag{7.22}$$

である。これを dt で割ると時間に対する全微分係数が得られる。すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta T}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left[T(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) - T(x,y,z,t)\right] \\ &= \frac{1}{dt}\frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{1}{dt}\frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{1}{dt}\frac{\partial T}{\partial z}dz + \frac{1}{dt}\frac{\partial T}{\partial t}dt \\ &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{dt}{dt}\frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.23}$$

となる。これは合成関数の微分である。(7.16)と同様に，

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \tag{7.23}$$

を考えると，

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} \tag{7.24}$$

が得られる。この全微分係数は流れに乗って測った温度の時間変化率を表しており，この視点はラグランジュ的な(Lagrangian)見方と呼ばれている。全微分係数をラグランジュ微分とか物質微分と呼ぶこともある。また，全微分を

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} \tag{7.25}$$

のように大文字で表すことも多い。ナブラ演算子を用いると，

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla T \tag{7.26}$$

と表される。これに対し，(7.18)のように視点を空間座標に固定して時間変化を考える

見方をオイラー的(Eulerian)な見方という。

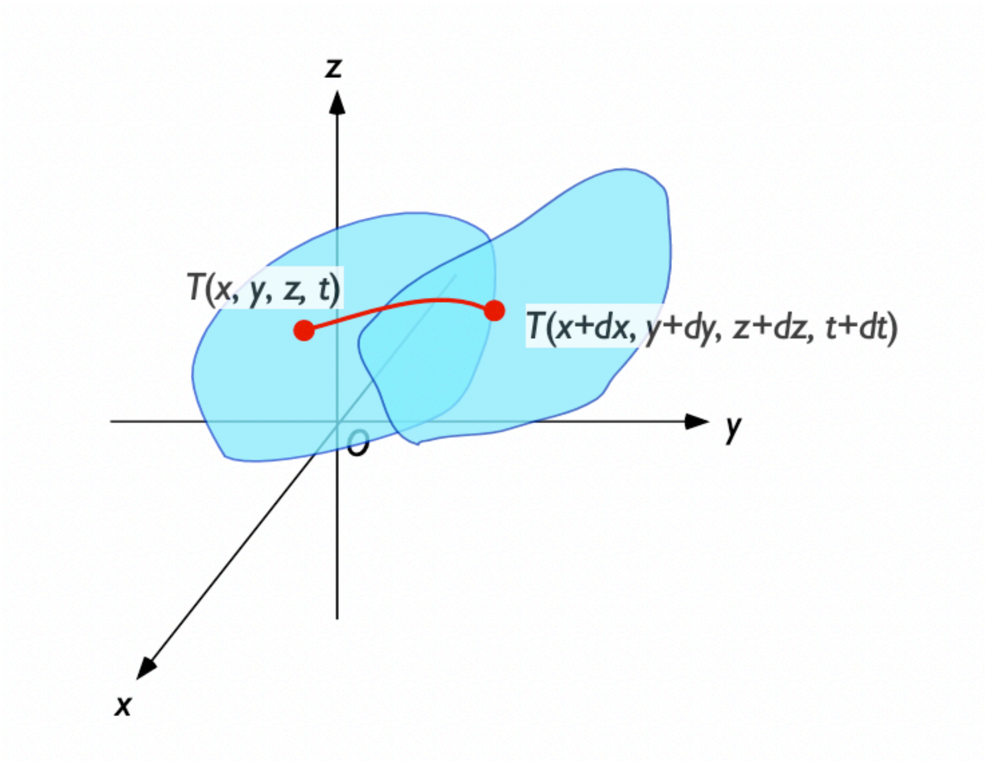


**図 7.3**　物質微分。時間 $dt$ の間に流体は移動する。温度は移動しながら変化するが，物質微分係数は，移動した点の温度の時間に対する変化率である。