I. 基本的事項

１．基本単位と基礎量

物理量を長さや時間などの基礎量（基本単位を持つ量）の組み合わせで表したとき、その組み合わせを**次元**という。異なる物理量の次元が同じだからといって、本質が同じとは限らないので注意が必要である。

・和と差は同じ次元の量のみ意味がある

・方程式は左辺・右辺の次元が同じ。

1.1 SI 単位系による基本単位

長さ [m]

質量 [kg]

時間 [s]

電流 [A]

温度 [K]

光度 [cd]

物質量 [mol]

1.2 基礎量と次元

長さ $[l] = L$

質量 $[m] = M$

時間 $[t] = T$

電流 $[i] = I$

温度 $[T] = 1$ 無次元量

２．組み立て単位・物理量

基礎量の組み合わせで作られる単位を組立単位という。

2.1 組み立て単位を持つ物理量とその次元

(1) 加速度 $[\mathrm{m\ s^{-2}}]$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{2.1}$$

$$[a] = VT^{-1} = LT^{-2}$$

(2) 力 [N] = [kg m s^{-2}]

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{2.2}$$

$$[\boldsymbol{F}] = MVT^{-1} = MLT^{-2} \tag{2.3}$$

(3) 仕事 [J] = [N m] = [kg m^2 s^{-2}]

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

$$[W] = MVT^{-1}L = ML^2T^{-2} \tag{2.5}$$

(3) 運動エネルギー [J] = [kg m^2 s^{-2}]

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.6}$$

$$[T] = \left[M\left(LT^{-1}\right)\right] = \left[ML^2T^{-2}\right] \tag{2.7}$$

運動エネルギーと仕事は本質的に同じものである。

(4) 力のモーメント [N m] = [kg m^2 s^{-2}]

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{2.8}$$

$$[N] = LMLT^{-2} = ML^2T^{-2} \tag{2.9}$$

力のモーメントと仕事は，次元が同じだが，その本質は異なるものである。

(5) 電荷 [C] = [A s]

$$q = \int_0^t i(t')dt' \tag{2.10}$$

$$[q] = IT \tag{2.11}$$

３．スカラー量・ベクトル量・テンソル量

スカラー量は大きさのみを持つ量である。ベクトルは大きさと方向をもつ。３次元空間では, ベクトル量は３つの成分を持つ。テンソルは方向を１つ以上もつ量の総称であり,

方向の数をテンソルの階数という。ベクトルは１つの方向をもつので，１階テンソルである。２階テンソルは２つの方向を持つ量ということができる。ベクトルとテンソルはスカラー量と区別するために太文字（ボールド体）や矢印付き文字・下線付き文字などで表す。スカラー量は座標変換に対して不変だが，ベクトル量とテンソル量は方向を持つため，座標によってその成分が変化する。

3.1 スカラー量
質量 m，電荷 q，長さ l，圧力 P,…など。

3.2 ベクトル量
速度 $\boldsymbol{v}$，力 $\boldsymbol{F}$，面の方向 $\boldsymbol{n}$，角速度$\boldsymbol{\omega}$，渦度$\boldsymbol{\zeta}$,…など。

3.3 ２階以上のテンソル量
応力$\boldsymbol{\sigma}$，歪$\boldsymbol{\varepsilon}$,…など。
２階テンソルは行列として表すことができ，同時に，行列は２階テンソルであるということができる。

3.4 この授業でよく使う記号
以下にこの授業で使う記号についてまとめておく。
変数

記号	意味	英語名	単位
$\boldsymbol{a}$	加速度ベクトル	acceleration vector	[m s^{-2}]
C	濃度，質量分率	concentration, weight fraction	[kg m^{-3}], non-dim. (%, ppm)
$\boldsymbol{D}$	歪速度テンソル	strain rate tensor	[s^{-1}]
D, H	厚さ	thickness	[m]
d	深さ	depth	[m]
$\boldsymbol{E}$	歪テンソル	strain tensor	non-dim. ([m m^{-1}])
$\boldsymbol{F}$	力のベクトル	force vector	[N]
H	発熱量	heat generation	[W kg^{-1}]
h	高さ，標高	height, elevation	[m]
$\boldsymbol{I}$	慣性モーメント*	moment of inertia	[kg m^{2}]
I, i	電流	electric current	[A]
$\boldsymbol{L}$	角運動量ベクトル	angular momentum vector	[N m s]

m	質量	mass	[kg]
$\boldsymbol{N}$	力のモーメント**	moment of force, torque	[N m]
P, p	圧力	pressure	[Pa]
$\boldsymbol{p}$	運動量ベクトル	momentum vector	[N s]
Q	熱エネルギー	thermal energy	[J]
q	電荷	electric charge	[C]
R, r	半径，動径	radius	[m]
$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}$	位置ベクトル	position vector	[m]
T	温度	temperature	[K], [°C]
t	時間	time	[s]
$\boldsymbol{u}$	変位ベクトル	displacement vector	[m]
$\boldsymbol{v}$	速度ベクトル	velocity vector	[m s^{-1}]
v_1, v_2, v_3	速度成分	velocity components	[m s^{-1}]
x, y, z	空間座標成分	spatial coordinates	[m]
x_1, x_2, x_3	空間座標成分	spatial coordinates	[m]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	無限小歪テンソル	infinitesimal strain	non-dim. ([m m^{-1}])
$\boldsymbol{\sigma}$	応力テンソル	stress	[Pa]
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}$	渦度ベクトル	vorticity	[s^{-1}]

*２階テンソル **ベクトル

物理定数，物性定数

記号	意味	英語名	
C_p	定圧比熱	specific heat	1.2×10^3 [J kg^{-1} K^{-1}]
E	ヤング率	young modulus	[Pa]
G	万有引力定数	universal gravity constant	6.67×10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]
g	重力加速度	gravitational acceleration	9.8 [m s^{-2}]
K	体積弾性率	bulk modulus	[Pa]
k	熱伝導率	thermal conductivity	3.96 [W m^{-1} K^{-1}]
α	熱膨張率	thermal expansivity	3×10^{-5} [K^{-1}]
ε_0	電気定数*	electric constant	8.85×10^{-12} [F m^{-1}]
η	粘性率	viscosity	10^{22} [Pa s]
κ	熱拡散率	thermal diffusivity	1×10^{-6} [m^2 s^{-1}]
κ, D	拡散率	diffusivity	10^{-6} [m^2 s^{-1}]

λ	第 1 弾性定数**	Lamé's first elastic modulus	[Pa]
μ	剛性率***	rigidity	[Pa]
ρ	密度	density	[kg m^{-3}]
σ	ポワソン比	Poisson's ratio	0.25 (non-dim.)

*真空の誘電率 **ラメの第 1 弾性定数 ***ラメの第 2 弾性定数

４．複素数とガウス平面

ここでは複素数が物理的のどのような意味を持つのか考える。

4.1 複素数

複素数は実数と虚数を足し合わせて作られた数である。複素数は虚数単位 i を用いて

$$c = a + bi \tag{4.1}$$

のように表す。実数項，虚数項それぞれの数値を２乗して平方根を取った

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4.2}$$

を複素数の絶対値という。虚数項をマイナスにして足した

$$\overline{c} = a - bi \tag{4.3}$$

を共役な複素数とよぶ。複素数の絶対値

$$|c| = \sqrt{c\overline{c}} \tag{4.4}$$

は複素数と共役な複素数の積の平方根と等しい。

4.2 ガウス平面

複素数の実数部分を x 軸，虚数部分を y 軸として表した平面をガウス平面とよぶ。こうすると, 複素数は 1 次元的な軸上に乗った数ではなく２次元的な量と考えることができる。ガウス平面上において，その原点と複素数の点までの距離は複素数の絶対値を表すことが分かる。ここで，x 軸から原点と複素数を結ぶ線までの角度をθとすると，

$$c = |c|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{4.5}$$

と表すことができる。つまり複素数は絶対値と位相を表す数と考えることもできる。

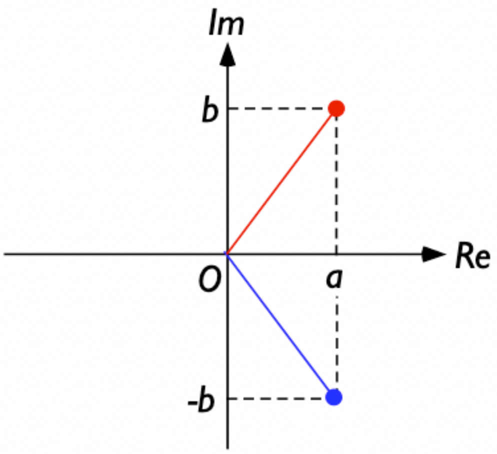

図 4.1　ガウス平面

4.3 オイラーの定理

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.6}$$

をオイラーの定理という。証明にはテイラー展開を用いる。この関係を用いると複素数は,

$$c = |c|e^{i\theta} \tag{4.7}$$

と表すことができる。

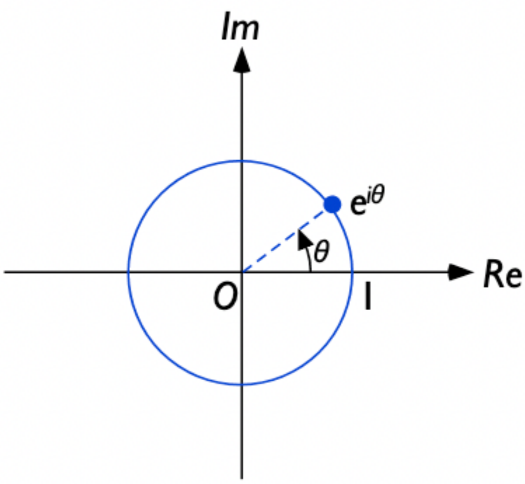

図 4.2　オイラーの定理

５．座標系

多くの物理量は，空間・時間の関数として表すことができる。ここでは，時空間における位置を定量的に表す座標について述べる。

5.1 物理量と場

ある物理量が空間・時間の関数として定義されている空間・時間をその物理量の**場**(field)とよぶ。時間は１次元，空間は３次元であり，それぞれ，独立した座標を時間は１つ，空間は３つ定義することができる。

5.2 直交曲線座標系

座標軸が曲線で表されているが, ある点では互いに直交している座標系を**直交曲線座標系**とよぶ。つまり，各点で定義される基本ベクトルが互いに直交している。

5.3 デカルト座標系

３つの直交する直線からなる座標を，直交直線座標系あるいは**デカルト座標系**(Cartesian coordinates)とよぶ。通常，座標は (x, y, z)あるいは(x_1, x_2, x_3)で表す。

基本ベクトルは座標軸の方向を持つ長さ１のベクトルである。すなわち，

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0) \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{j} = (0,1,0) \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{k} = (0,0,1) \tag{5.3}$$

の３つのベクトルである。**位置ベクトル**は，その名の通り位置を示すベクトルであり，

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z) \tag{5.4}$$

である。基本ベクトルを用いて書くと，

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{5.5}$$

と表すことができる。

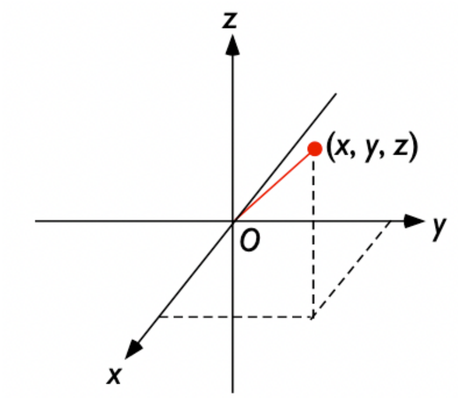

図 5.1　直交座標系

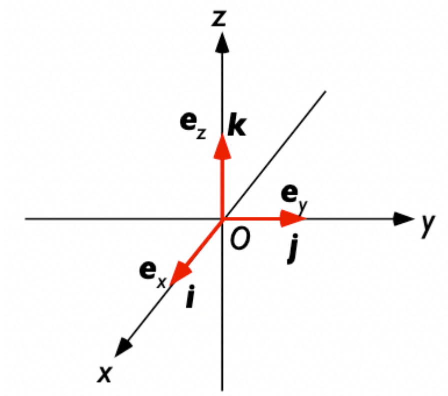

図 5.2　基本ベクトル

5.4 円筒座標系

半径 r と x 軸からの角度ϕおよび z で表す座標系を**円筒座標系**とよぶ。つまり，$(r,\ \phi,\ z)$ の座標で表す。デカルト座標系の座標値は

$$x = r\cos\phi \tag{5.6}$$

$$y = r\sin\phi \tag{5.7}$$

$$z = z \tag{5.8}$$

と表される。

r は，

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \tag{5.9}$$

であり，θは

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{5.10}$$

と表すことができる。z 軸をなくすと２次元の座標系となり，**２次元極座標**とよばれる。

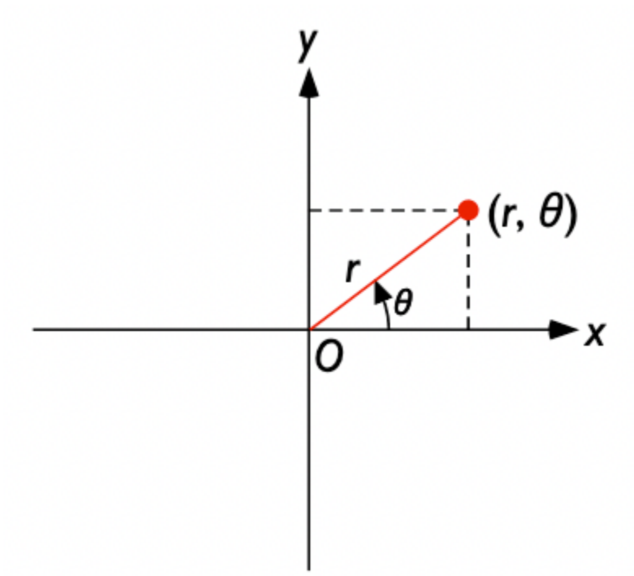

図 5.3　２次元極座標

5.4 球座標系

球面を考えて，半径 r と地球表面のように余緯度θ, および経度ϕで表した座標を**３次元極座標**あるいは**球座標**とよぶ。デカルト座標系の座標値は球座標の座標値(r, θ, ϕ)を用いて次のように表される。

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{5.11}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{5.12}$$

$$z = r\cos\theta \tag{5.13}$$

また，半径は

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \tag{5.14}$$

である。

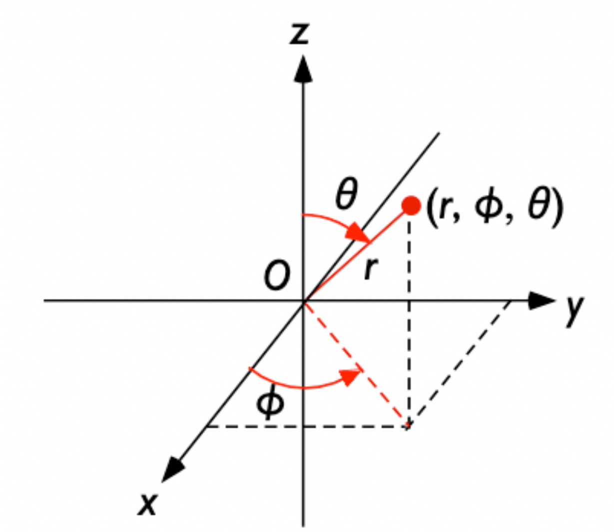

図 5.4　球座標